(D)

1.) Gute Fragen

In vielen Bereichen unseres Lebens spielen Roboter eine immer wichtigere Rolle. Nebst Operationsrobotern gibt es Roboter, die Böden reinigen, Rasen mähen, Minen suchen, Autos herstellen, den Mars erkunden, und so weiter.

Nehmen wir an, wir haben einen Roboter hergestellt, der auf Rädern mit einem Durchmesser von 6 Zentimetern fährt. Die Geschwindigkeit ist so eingestellt worden, dass die Räder 30 Umdrehungen pro Minute machen.

a) Welche Strecke legt der Roboter in 2, 5, 10, 11.3 Minuten zurück?

b) Welche Strecke legt der Roboter in x Minuten zurück? Können Sie eine Formel finden, die jeder beliebigen Zahl von Minuten die Länge der in dieser Zeit zurückgelegten Strecke zuordnet?

c) Gibt es bezüglich der Zahlen, die für x erlaubt sein sollen, irgendwelche Einschränkungen?

d) In b) haben Sie jeder beliebigen Anzahl Minuten die in dieser Zeitspanne zurückgelegte Weglänge zugeordnet. Können Sie auch umgekehrt eine Zuordnung finden, die jeder möglichen Weglänge die dafür benötigte Anzahl Minuten zuordnet?

Das Graphentelefon

Liebe Schülerin, lieber Schüler

Bitte setzen Sie sich Rücken an Rücken mit Ihrem Banknachbarn oder Ihrer Banknachbarin.

Sie werden gleich von der Lehrperson den Graphen einer Funktion bekommen. Stellen Sie sich vor, dass Sie mit Ihrem Banknachbarn oder Ihrer Banknachbarin telefonieren und ihm/ihr den Graphen Ihrer Funktion möglichst genau beschreiben müssen, so genau, dass dieser/diese den Graphen selbständig skizzieren kann.

Unten finden Sie Platz, um die Beschreibungen, die sich als nützlich erweisen, stichwortartig zu notieren. Da auch Sie selber einen Graphen skizzieren werden, finden Sie unten auch Platz für den Graphen, den Ihr Banknachbar oder Ihre Banknachbarin Ihnen beschreiben wird.

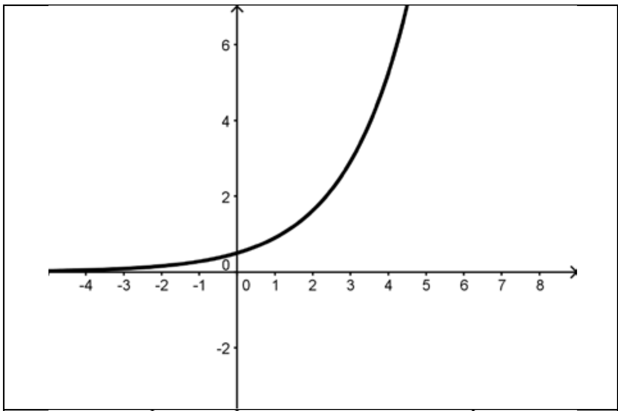
Es ist gut möglich, dass Ihre Beschreibungen den in der Mathematik real verwendeten Beschreibungen schon sehr nahe kommen. Ihre Lehrperson wird nach dem Spiel diejenigen Begriffe erläutern, die als Fachbegriffe Eingang in die Mathematik gefunden haben.

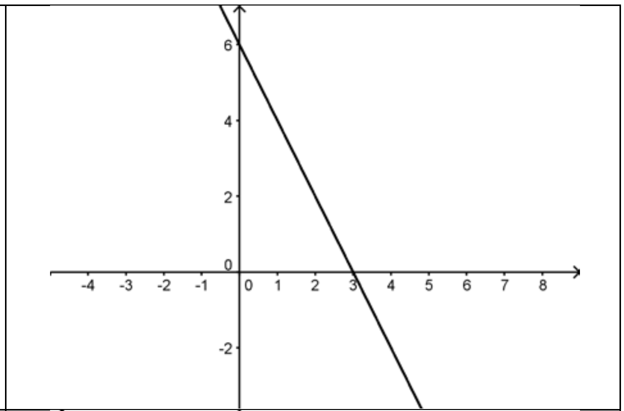
Beschreibungen meines Graphen, die sich als nützlich erwiesen haben:

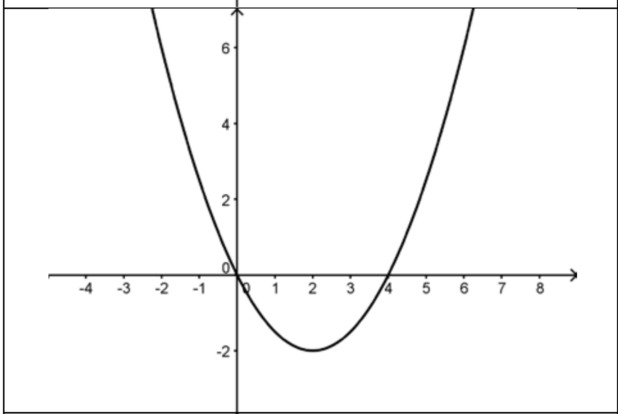
Der Graph meines Banknachbarn oder meiner Banknachbarin:

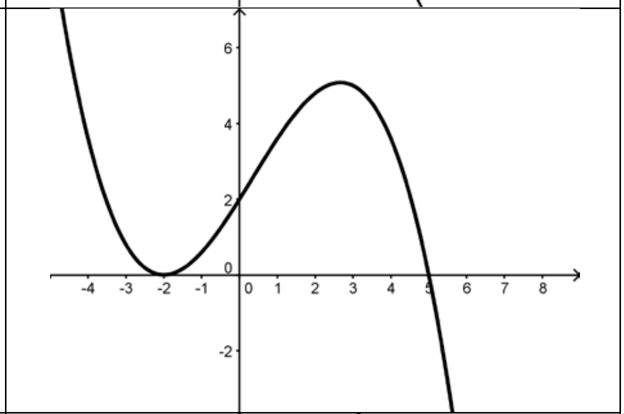
Für die Lehrperson:

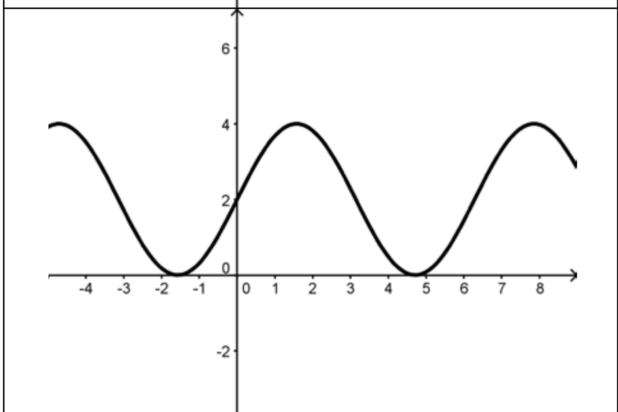
Teilen Sie jedem Schüler und jeder Schülerin einen dieser Graphen aus, aber so, dass nie zwei Rücken an Rücken sitzende Lernende denselben Graphen erhalten.

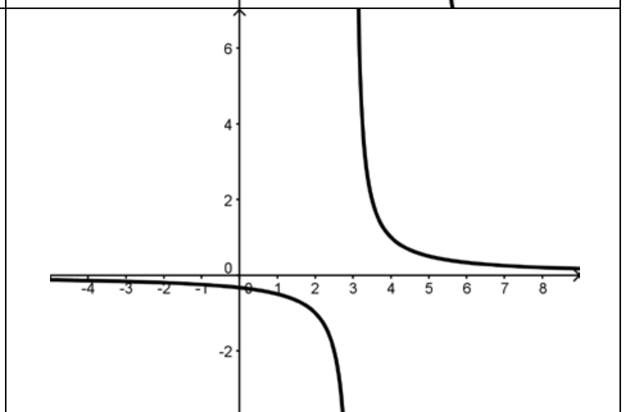


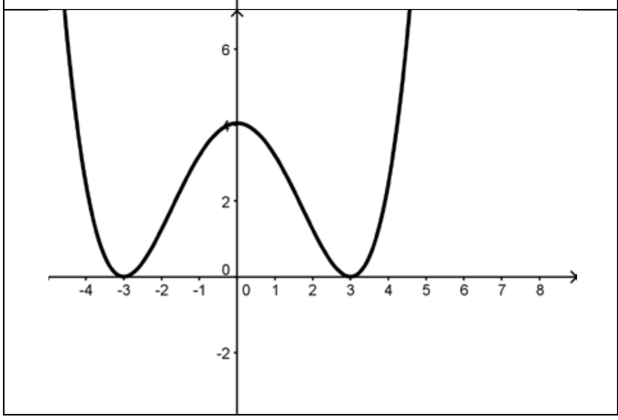


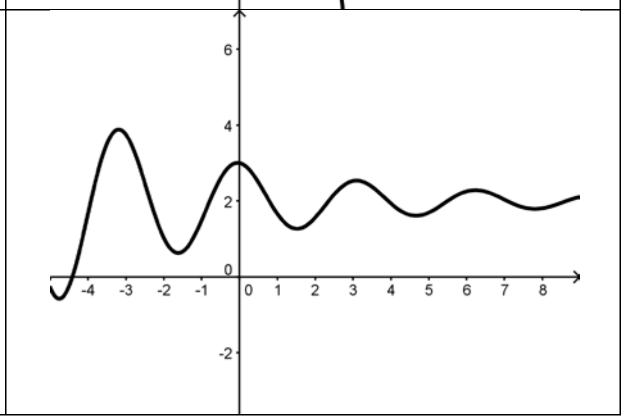


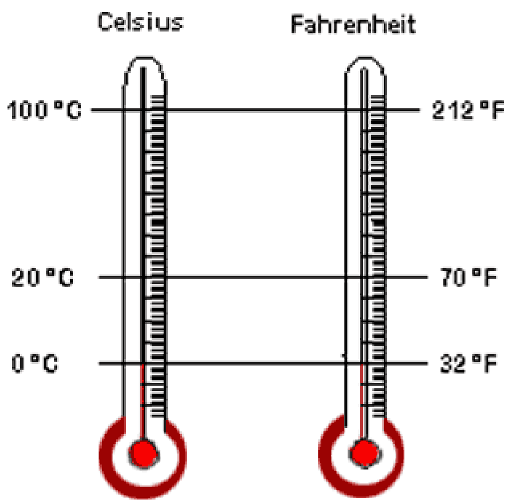










Alice und Bob planen, Ferien in den USA zu verbringen. In ihren Vorbereitungen setzen sie sich darum mit den Gepflogenheiten dieses Landes auseinander und lesen unter anderem, dass Temperatur in den USA meist in *Fahrenheit* gemessen wird. Ein Reiseführer informiert sie, dass man, um Fahrenheit in Grad Celsius umzurechnen, erst 32 abziehen und dann den erhaltenen Wert mit 5/9 multiplizieren muss.	

Wie könnten Alice und Bob diesen Sachverhalt als Funktion darstellen? Um was für eine Art Funktion handelt es sich wohl? Warum? Was lässt sich über ihren Graphen sagen? Und wie liesse sich die Umrechnung von Grad Celsius in Fahrenheit durch eine Funktion darstellen?

a) Wie könnten Alice und Bob diesen Sachverhalt als Funktion darstellen? Um was für eine Art Funktion handelt es sich wohl? Warum?

____

b) Was lässt sich über ihren Graphen sagen?

____

c) Und wie liesse sich die Umrechnung von Grad Celsius in Fahrenheit durch eine Funktion darstellen?

____

Gute Fragen statt Tell & Practice – Beispiele:

- Da wir nun offenbar in der Lage sind, die eine oder andere konkrete quadratische Gleichung zu lösen, wäre es da nicht überaus wünschenswert, eine Methode zu entwickeln, mit der man alle quadratischen Gleichungen lösen kann? Und wie könnte eine solche Methode aussehen? Worauf müssen wir bei der Umsetzung achten?

- Jemand strandet nach einem Schiffsunglück auf einer einsamen Insel in der Form eines gleichseitigen Dreiecks. Wo muss er die Hütte bauen, wenn er möchte, dass die Summe der Weglängen
  a) zu den drei Ecken minimal ist?
  b) zu den Dreiecksseiten (lotrecht gemessen) minimal ist?

- Unter welchen Voraussetzungen an einen Graphen gibt es eine (geschlossene) Euler-Tour? Und wenn Sie die Voraussetzungen notiert haben, ist das dann eine Äquivalenz-Aussage oder nur eine Implikation?

- Aus wie vielen Fünfecken und Sechsecken ist eigentlich der klassische Fussball aufgebaut?

- Aus wie vielen Dreiecken besteht eigentlich die Triangulation eines n-eckigen Vielecks? Und ist die Anzahl abhängig von der konkreten Art der Triangulation?

- Wieso kam es Mathematikern einst in den Sinn, $a^{-n} := \frac{1}{a^n}$ $(n \in \mathbb{N})$ zu definieren? Wie lässt sich diese Definition motivieren?

- Wenn keine Stammfunktion zu einer gegebenen Funktion gewonnen werden kann, wie könnte der Wert des bestimmten Integrals dann dennoch approximativ berechnet werden?

- Unter welcher Voraussetzung wären wir bereit, all unser Geld zu verwetten dafür, dass die mathematische Aussage … korrekt ist? Was genau müsste dazu geleistet werden? Und warum macht es Sinn, das zu tun?

- Welche Energie muss eigentlich aufgewendet werden, um eine gegebene Masse in eine Umlaufbahn der Erde zu schiessen?

- Können wir mathematisch analysieren und damit verstehen, weshalb es 1959/1960 zu zwei Propellerflugzeug-Crashs wegen Oszillation der Flügel kam?

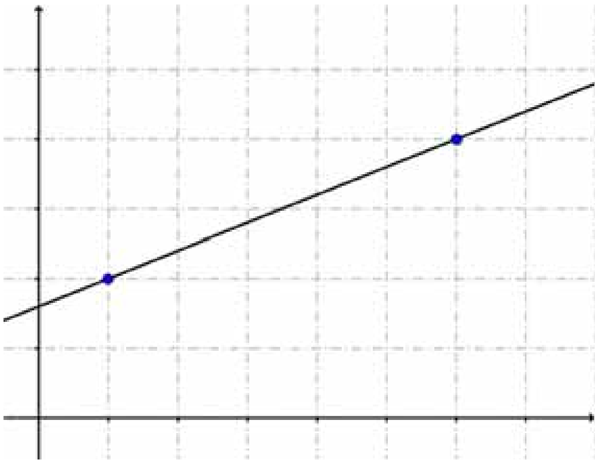
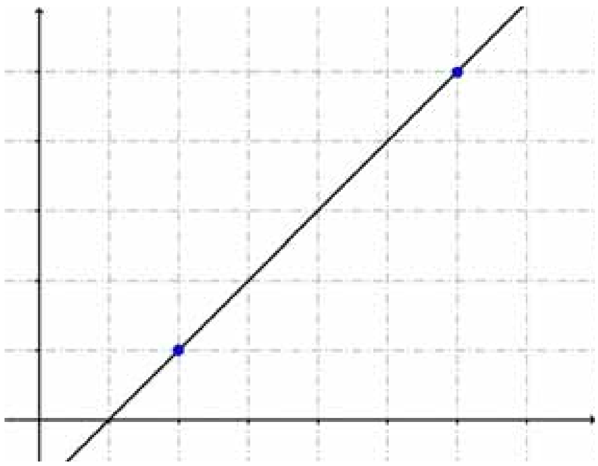
2.) ICC

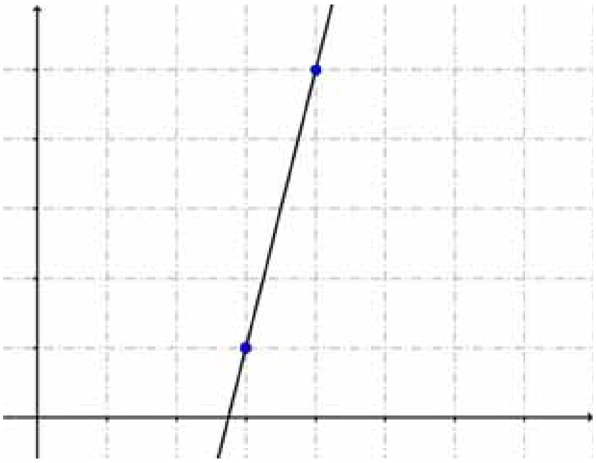
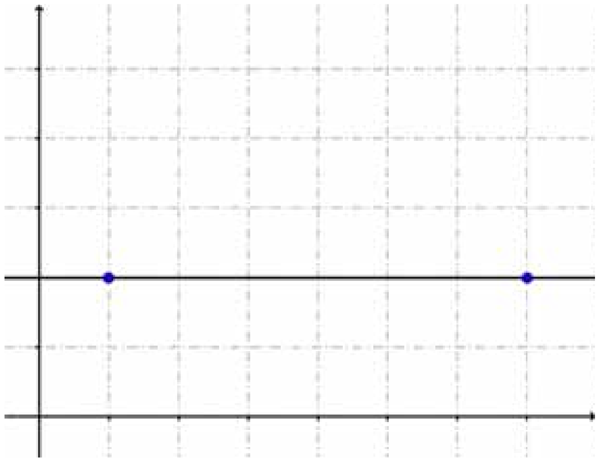
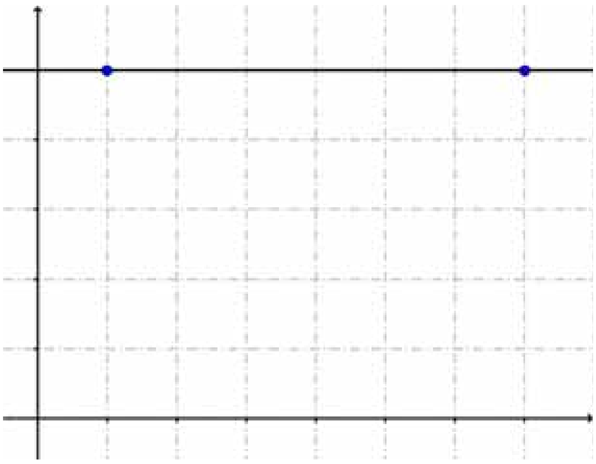
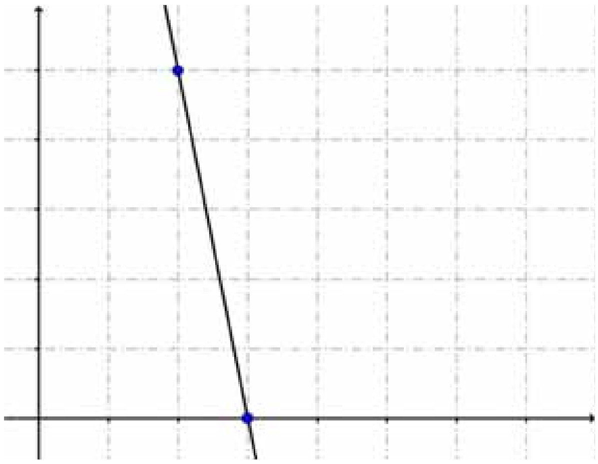
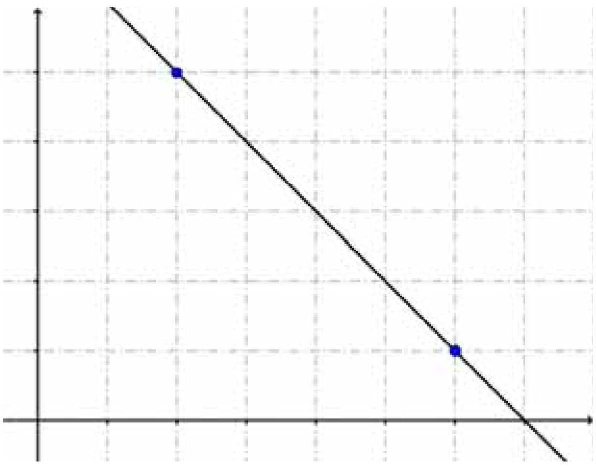
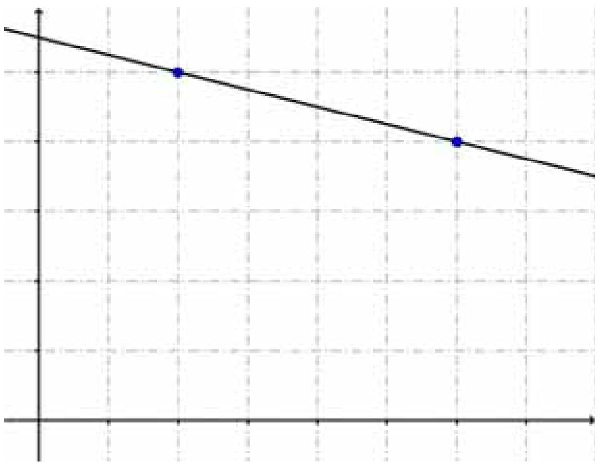
Eine Studie (Daniel L. Schwartz e.a., *Practicing versus Inventing with contrasting cases: The effects of telling first on learning and transfer*, Journal of Educational Psychology, American Psychological Association, 2011) hat nachgewiesen, dass es gerade im Hinblick auf erfolgreichen Transfer neuer Wissenselemente vorteilhaft sein kann, wenn Lernende aufgefordert werden, ein neues Konzept anhand kontrastierender Fallbeispiele erste zu erfinden, bevor die Lehrperson die entsprechende Instruktion gibt und Übungen präsentiert.

Beispiel:

Alice hat die folgenden Abbildungen von Geraden vor sich. Sie ruft Bob an, der die Geraden nicht sieht, und möchte ihm erzählen, wie die Geraden aussehen und insbesondere, wie steil sie sind. Können Sie Alice bei diesem Unterfangen helfen? Genauer: Erfinden Sie eine Masszahl für „Steilheit". Drücken Sie die Steilheit einer Geraden durch eine einzige Zahl aus, die Alice dann am Telefon nennen kann. Diese Masszahl für Steilheit soll folgenden Regeln genügen:

1. Die Zahl soll für jede mögliche Gerade nach derselben Regel zustande kommen.
2. Es muss für Alice möglich sein, die Masszahlen allein aus den abgebildeten Grafiken ohne weitere Hilfsmittel präzise zu bestimmen.
3. Die Grösse der Zahl gibt Bob eine präzise Vorstellung davon, wie steil eine Gerade ist.

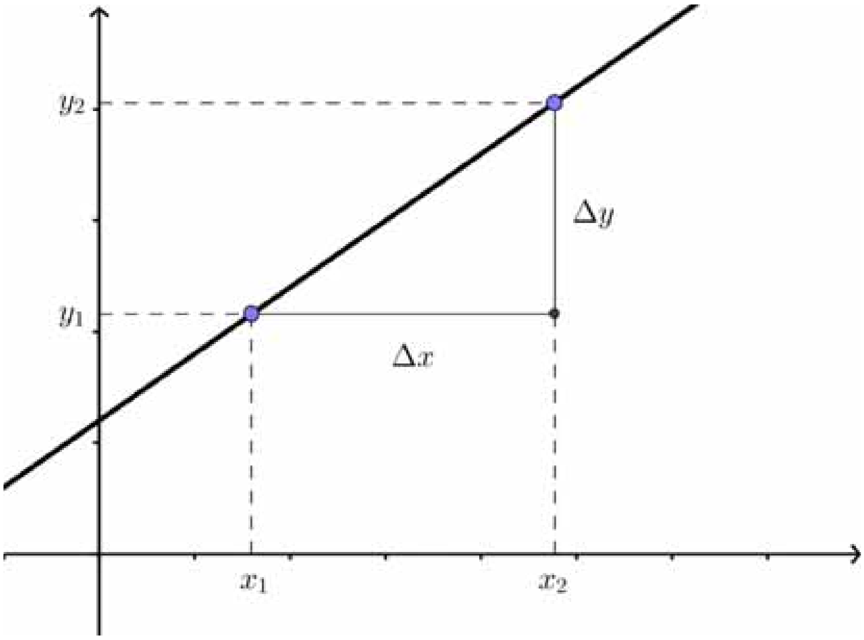
(A)	(B)
	
Masszahl:	Masszahl:

(C)  Masszahl:	(D)  Masszahl:
(E)  Masszahl:	(F)  Masszahl:
(G)  Masszahl:	(H)  Masszahl:

Lesen Sie nun bitte den folgenden Theorieeintrag:

Häufig treten Geraden in Koordinatensystemen als Graphen von linearen Funktionen in Erscheinung. Eine Gerade kann unter anderem dadurch charakterisiert werden, dass man ihre „Steilheit" durch eine Masszahl ausdrückt.

Der Fachbegriff hierfür ist **Steigung**. Die Steigung ist also eine Masszahl für die Steilheit einer Geraden, und sie ist wie folgt definiert:

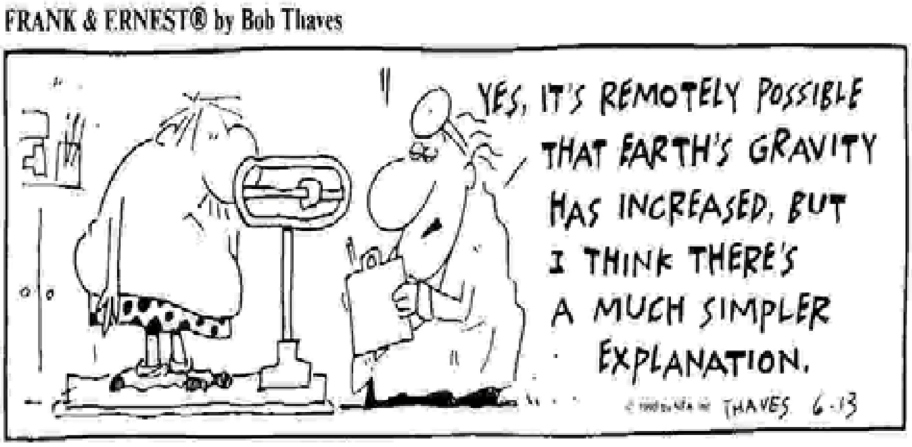


Führt eine Gerade durch zwei Punkte (x_1, y_1) und (x_2, y_2) mit $x_1 \neq x_2$, so ist die **Steigung** m definiert als das Verhältnis

$$\boxed{m := \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

Geraden, die von links nach rechts gesehen ansteigen, haben also eine positive Steigung, während Geraden, die von links nach rechts gesehen fallen, negative Steigung haben. Verläuft eine Gerade parallel zur x-Achse, so ist die Steigung 0, weil, unabhängig davon, wo man die beiden Punkte wählt, $\Delta y = 0$ ist. Geraden, die parallel zur y-Achse verlaufen, haben keine definierte Steigung, weil bei solchen Geraden $\Delta x = 0$ wäre und man nicht durch 0 dividieren kann.

3.) Selbsterklärungen



Material zum Thema:

(1) Danielle S. McNamara, Joseph P. Magliano, "*Self-Explanation and Metacognition: The Dynamics of Reading*", The University of Memphis
(2) Michelene T. H. Chi, Nicolas De Leeuw, Mei-Hung Chiu, Christian Lavancher, "*Eliciting Self-explanations improves Understanding*", University of Pittsburgh, in: Cognitive Science 18, 437 – 477 (1994)
(3) Alexander Renkl (Schwäbisch Gmünd, Germany), Robin Stark, Hans Gruber, Heinz Mandl (University of Munich, Germany), "*Learning from worked-out examples: The effects of example variability and elicited self-explanations*", in: Contemporary Educational Psychology 23, 90 – 108 (1998)
(4) Thorid Rabe (Universität Potsdam), "*Textgestaltung und Aufforderung zu Selbsterklärungen beim Physiklernen mit Multimedia*", Logos Verlag, Berlin 2007
(5) Michelene T. H. Chi, Miriam Bassok, „*Self-Explanations: How students study and ude examples in learning to solve problem*", in: Cognitive Science 13, 145-182, 1989

Aus (1):

In our research, we have defined self-explanation as the process of explaining text or material to oneself either orally or in writing. These explanations are generally based on information contained in the discourse context and relevant world knowledge. Self-explanation can be initiated because it is associated with an explicit comprehension goal to explain while reading (Chi, de Leeuw, Chiu, & LaVancher, 1994; Magliano, Trabasso, & Graesser, 1999; McNamara, 2004) or it can occur naturalistically, presumably as the result of a metacognitive awareness of a need to explain what is being read (Chi, Bassok, Lewis, Reimann, & Glasser, 1989) or a search for coherence (Graesser, Singer, & Trabasso, 1994). A good deal of research has shown that readers who self-explain either spontaneously or when prompted to do so understand more from learning materials and construct better mental models of the content (Chi et al., 1989; Chi & VanLehn, 1991; Chi, de Leeuw, Chiu, & LaVancher, 1994; Magliano, Trabasso, & Graesser, 1999; Trabasso & Magliano, 1996; VanLehn, Jones, & Chi, 1992).

Zu (2):

Beim Lernen muss immer wieder neues Wissen an das bestehende angebaut werden. Dieser Prozess kann vereinfacht werden dadurch, dass man S+S auffordert, aktiv zu konstruieren, was sie lernen sollen. *Self-explaining was shown to be effective at improving the acquisition of problem-solving skills*.

Der Selbsterklärungseffekt wurde in diversen Umfeldern nachgewiesen:

- Pirolli und Recker (1994) wiesen ihn nach im Zusammenhang mit dem Erlernen der Programmiersprache LISP:
- Ferguson-Hessler und de Jong (1990) wiesen ihn nach, als Probanden die Grundprinzipien von Elektrizität und Magnetismus lernen mussten.
- Nathan, Mertz und Ryan (1994) wiesen ihn nach im Zusammenhang mit dem Lösen von algebraischen Textaufgaben.

The whole idea of the new "talking science" approach is that students should learn to be able to *talk* science (to understand how the discourse of the field is organized, how viewpoints are presented, and what counts as arguments and support for these arguments), so that students can participate in scientific discussions, rather than just *hear* science.

Durchführung der Studie:

- Experimentgruppe und Kontrollgruppe, alles S+S derselben öffentlichen Schule in Pittsburgh.
- Keiner hatte vorher einen Kurs in Biologie genommen.
- Zuerst: Praetest (Abfrage des bisherigen Wissens über den Blutkreislauf des Menschen)
- Dann hatte jeder einen text aus 101 Sätzen über den Blutkreislauf des Menschen zu lesen. Jeder Satz war auf eine separates Stück Papier gedruckt. Die S+S der Experimentgruppe wurden gebeten, nach jedem Satz in eigenen Worten zu erklären, was die genaue Bedeutung dieses Satzes ist. Die Kontrollgruppe erhielt keine solche Anweisung, wurde aber gebeten, den Text zweimal zu lesen, um ungefähr gleichlange Beschäftigung sicherzustellen.
- Zum Schluss (aber mindestens eine Woche später) absolvierten alle Probanden einen Posttest.
- Alle Sitzungen wurden gefilmt.
- Jede Antwort im Posttest wurde mit maximal 6 Punkten bewertet.

Ergebnis:
Both prompted and unprompted students gained significantly greater understanding from the pretest to the posttest. (…) However, from the pretest to the posttest, the gain was greater for the prompted group (32%) than the unprompted group (22%). (…) The difference between the two groups' improvement is even more dramatic if only the more difficult Category 3 and 4 questions are examined: The prompted group improved by 22.6% versus only 12.5% for the unprompted group.

Das ist besonders beeindruckend, wenn man Folgendes bedenkt: Der Text war sehr gut aufgebaut und ausformuliert, altersgerecht und gut zugänglich. Die Kontrollgruppe konnte den Text zweimal lesen. Und der Kontrollgruppe war es ja nicht untersagt, spontan und innerlich Selbsterklärungen zu formulieren.

Zu (3):

Beispiele bevorzugt:

- Anderson e.a. (1984, 1985) fanden im Zusammenhang mit dem Erlernen von LISP-Programming, dass die Probanden allgemeine Beschreibungen von Prozeduren ignorierten und stattdessen fertige Beispiele zur Hand nahmen
- LeFevre und Dixon (1986) präsentierten den Probanden einerseits abstrakten Instruktionstext und andererseits ausgearbeitete Beispiele (worked-out examples) und stellten sie vor die Wahl, zu benutzen, was sie wollten. Beide Informationsquellen widersprachen einander, so dass aus den Arbeiten der Probanden festgestellt werden konnte, welche Quelle benutzt worden war. Die Probanden bevorzugten die Beispiele deutlich, selbst dann, also der Informationsgehalt der Beispiele reduziert und die Texte noch redundanter und detaillierter gemacht und die Probanden eindringlich gebeten wurden, die Texte zu benutzen.

Eine der zentralen Fragen der Studie:

- *To what extent is near-transfer performance influenced by presenting multiple examples and by eliciting self-explanations?*

Durchführung der Studie:

- 56 Lehrlinge einer deutschen Bank beteiligten sich freiwillig an der Studie.
- In einem Pretest wurden grundlegende Algebrakenntnisse wie auch das Vorwissen im Bereich Zins- und Zinseszinsrechnen abgefragt.
- Dann lasen alle einen instruierenden Text zum Thema Zins- und Zinseszinsrechnen. Die Experimentgruppe erhielt nun 9 worked-out Examples und wurde aufgefordert, die Beispiele zu bearbeiten und mit Selbsterklärungen Schritt für Schritt zu erklären. Die Kontrollgruppe erhielt dieselben 9 Beispiele mit der Aufforderung, die zu lesen.
- Am Ende fand ein Posttest statt mit near-transfer Problemen.

Ergebnis:

For the algebra pretest, we found no significant group differences. (…) Similar results were obtained for the topic-specific test. (...) Thus, there were no significant group differences that threatened the internal validity of the experiment.

(…)

Near transfer was significantly fostered by the eliciting of self-explanations.

Aus (4):

In Anlehnung an deLeeuw und Chi (2003) kann man als Selbsterklärung zunächst die Anstrengungen und Versuche von Lernenden bezeichnen, sich den Inhalt eines Textes selbst zu erklären. (…) Selbsterklärungen umfassen in diesem Sinne kausales Argumentieren, das Erkennen von Implikationen, Analogiebildung, Verglei-

che, Beispiele und relevante Assoziationen zu Vorerfahrungen. Ausgeschlossen sind (…) reine Paraphrasierungen, die fast wörtliche Wiederholungen des Textinhalts darstellen.

In mehreren Untersuchungen (…) hat sich gezeigt, dass Lerner bessere Behaltensleistungen und besseres Problemlösen zeigen, wenn sie sich Textinhalte erklären.
(…)
Dabei scheint nicht das laute Sprechen per se zu besserem Verständnis zu führen. Vielmehr werden solche Äusserungen, die nach der obigen Definition als Selbsterklärungen zu bezeichnen sind, für einen erfolgreichen Umgang mit Texten verantwortlich gemacht.
(…)
Demnach schlägt sich die Aufforderung zu Selbsterklärungen (im Vergleich zum Ausbleiben derselben) positiv in den Lernergebnissen nieder.
(…)
Selbsterklärungen müssen nicht notwendigerweise in wissenschaftlicher Hinsicht korrekt sein oder en Intentionen des Gestalters und den Zielen der Lernsituation entsprechen. (…) Es könnte die Sorge berechtigt sein, dass Lernende beim Selbsterklären ihre mitgebrachten und möglicherweise „falschen" Vorstellungen eher vertiefen als hinterfragen. (…) Andere Befunde zeigen allerdings keinen derartigen negativen Einfluss falscher Selbsterklärungen, was im Zusammenhang mit einem Biologietext damit begründet wird, dass die Lernenden beim Selbsterklären eher auf Inkonsistenzen in ihrem Wissen stossen und so Gelegenheit zur „Selbstreparatur" erhalten.

<u>Beispiele:</u>

Lehrer:
Sei $s(t) = -t^2 + 9$ eine Bewegungsgleichung. Welche der folgenden Behauptungen treffen zu?

a) Zwischen $t = 0$ und $t = 3$ ist die Geschwindigkeit des bewegten Objektes positiv.
b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t = 0$ und $t = 3$ beträgt -3 LE/ZE
c) Es gibt einen Zeitpunkt zwischen $t = 0$ und $t = 3$, zu dem die momentane Geschwindigkeit exakt -3 LE/ZE beträgt.
d) Zwischen $t = 0$ und $t = 3$ ist die (momentane) Geschwindigkeit des bewegten Objektes streng monoton wachsend.
e) Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t = 0$ und $t = 1$ ist grösser als diejenige zwischen $t = 0$ und $t = 2$.

Schüler:
Korrekt sind b, c und e. Zu Punkt d: Sie ist streng monoton fallend! Zu Punkt e:Der Betrag der Geschwindigkeit ist zwar grösser, da es aber die negative Richtung ist, wird sie kleiner.

Lehrer:
Jemand formuliert sehr ungenau: „Die erste Ableitung einer Funktion ist die Tangente." Verbessern Sie diese Formulierung zu einer Aussage, die in einem Lehrbuch Eingang finden könnte.

Schüler:

Die 1te Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 misst die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt $\left(x_0\ ,f\left(x_0\right)\right)$, also die momentane Änderungsrate.

Lehrer:

Betrachten Sie die Funktion $f : x \mapsto x^7$. Wenn Sie die erste Ableitung mit Hilfe der „h-Formulierung“ der Definition berechnen, ist es nützlich, den Binomischen Lehrsatz zu verwenden, um $\left(x+h\right)^7$ als Summe zu schreiben. Nennen Sie die für die Rechnung relevanten Summanden dieses Terms, und erklären Sie, wie es Ihnen damit nun gelingt, die Ableitung von *f* erfolgreich zu berechnen.

Schüler:

$$f'\left(x\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{f\left(x+h\right)-f\left(x\right)}{h}\right) = \lim_{h\to 0}\left(\frac{\left(x+h\right)^7 - x^7}{h}\right)$$

Bei $\left(x+h\right)^7$ kann man mit dem Pascalschen Dreieck die Koeffizienten herausfinden. Der erste Koeffizient ist 1(von x^7), im weiteren wird der Exponent von *x* immer um 1 kleiner, während der Exponent von *h* immer um eins grösser wird, sodass der letzte Summand so aussieht: 1(h^7). Da $f\left(x\right)=x^7$ ist, kürzt sich dieser Summand mit dem ersten weg und es bleiben noch die Summanden von $\left(x+h\right)^7$ übrig ohne den ersten Summanden halt! So haben jetzt alle Summanden ein *h*, weshalb man als nächstes *h* ausklammern kann und *h* dann mit dem *h* im Nenner wegkürzen kann. Jetzt lässt man *h* zu 0 tendieren und schaut was passiert. Alle Summanden die ein *h* haben, kann man theoretisch wegstreichen, da ihr *h* zu 0 tendiert. Der erste Summand, der kein *h* mehr hatte nach dem ausklammern, der bleibt übrig und lautet: $7x^6$.

Lehrer:

Stellt man einen Differentialquotienten auf, so muss man ja unter anderem den Term $f\left(x+h\right)-f\left(x\right)$ bilden. Hugo, ein mathematischer Laie, behauptet nun, dass $f\left(x+h\right)-f\left(x\right)=f\left(h\right)$ sei. Ist diese Behauptung korrekt für $f\left(x\right)=\sin\left(x\right)$? Ist sie korrekt für eine lineare Funktion? Ist sie korrekt für $f\left(x\right)=a\cdot x$?

Schüler:

- sin (3*pi/2) - sin(pi/2) = -2 und sin(pi) = 0 , somit stimmt es nicht !
- $f\left(x\right)=ax+b$

  $a\left(x+h\right)+b-\left[ax+b\right]=ah$, somit stimmt es nicht, denn es müsste $ah+b$ ergeben damit es stimmt, es ergibt aber nur ah also stimmt es nicht.
- Ja! Erstaunlicherweise!

Lehrer:
Der Beweis der Produktregel lebt von einer überaus reizvollen kleinen Idee. Schildern Sie die Beweisidee bitte in wenigen Sätzen und Ihren eigenen Worten.

Schüler:
Die Grundidee ist eine Erweiterung des Differentialquotienten mit dem Term $-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)$, welcher offensichtlich gleich 0 ist, das muss er ja auch, damit man den Differentialquotienten nicht verändert. Dieser Term führt nun dazu, dass man bei den ersten beiden Summanden $g(x+h)$ ausklammern kann und dann also $g(x+h)\cdot(f(x+h)-f(x))$ bekommt. Bei den Summanden 3 und 4 kann man hingegen $f(x)$ ausklammern, und das gibt dann $f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))$. Also hat man mit allem Drumherum, etwas umgestellt, folgendes Bild: $\lim\limits_{h\to 0}\left(g(x+h)\frac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\frac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$. Nun kann man problemlos fertigrechnen. Ohne eine geschickt gewählte Erweiterung des Differentialquotienten könnte man die obige Ableitung nicht durchführen. Der Erweiterungsterm muss einfach so gewählt werden, dass die beiden Funktionen *f* und *g* getrennt voneinander abgeleitet werden können, voneinander gelöst werden. Das wird dadurch möglich, dass man so erweitert, dass zum einen der Differentialquotient von *f* ersichtlich wird und zum anderen jener von *g*.

Lehrer:
(gleiche Frau wie oben)

Schüler:
Man merkt schnell das man beim Produkt nicht wie bei der Summe die verschiedenen Teile einzeln ableiten kann. Also setzt man beim Differentialquotienten einen Term ein, welcher gleich 0 ist, aber den Bruch sehr stark vereinfacht. Danach kann man den Limes aufteilen und erhält $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Lehrer-Kommentar:
Wie lautet dieser Extraterm? Und wo wird er genau eingefügt? Und warum gelingt das Ableiten nachher einfacher?

Lehrer:
Begründen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: „Es sei $g(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad 4. Dann hat *g* höchstens drei Wendepunkte.“

Schüler:
Nein, höchstens 2. Wir haben ja ermittelt, dass eine Polynomfunktion n-ten Grades höchstens $n-1$ Extrema besitzt. Also in diesem Fall 3. Und wenn die Funktion 3 Extrema besitzt, können

es ja gar nicht 3 Wendepunkte sein. Denn ein Wendepunkt entsteht zwischen zwei Extrema. Also gibt es höchstens $n-2$ Wendepunkte. In diesem Fall 2.
Sonntag-Morgen Aufheiterung:

- Mathematiker sterben nicht. Sie verlieren nur einige ihrer Funktionen. Haha!
- Treffen sich ein Operator und eine Funktion. Sagt der Operator: „Lass mich vorbei, oder ich leite Dich ab.“ Sagt die Funktion: „Mach doch, mach doch, ich bin die Funktion e^x.“
- Kommt ein Vektor in einen Drogenladen und sagt: „Ich bin linear abhängig.“
- Kommt ein Nullvektor zum Psychiater: „Herr Doktor, ich bin orientierungslos.“
- Wie befreit sich ein Mathematiker aus einem geschlossenen Käfig? Er definiert: Hier ist aussen!

Lehrer:
In einem Beispiel haben wir beobachtet, dass ein Objekt, das zum Zeitpunkt *t* die Geschwindigkeit $v(t)$ hatte, im Zeitintervall [*a* , *b*] die Wegstrecke $\int_a^b v(t)\,dt$ zurücklegte. Ist das immer richtig? Wenn wir zum Beispiel für $v(t) = \sin(t)$ und $a = 0$ und $b = 2\pi$ das obige Integral berechnen, so ergäbe das ja 0. Trotzdem hat das Objekt aber Weg zurückgelegt. Wie ist das zu erklären? Oder besser: Was genau drückt obiges Integral immer aus?

Schüler:
Wenn die Geschwindigkeit negativ ist, bedeutet das, dass das Objekt sich rückwärts bewegt (oder vorwärts und die Achsen sind quasi umgekehrt gewählt). Wäre $v(t) = \sin(t)$, heisst das, das Objekt bewegt sich stetig nach vorne bis zum Zeitpunkt Pi und dann wieder zurück. Zum Zeitpunkt 2*Pi ist das Objekt wieder an der Stelle, wo es sich am Anfang befand. Diese Vorwärts-Rückwärts-Bewegung wiederholt sich periodisch. Das Integral $\int_a^b v(t)\,dt$ drückt also im Allgemeinen aus, wo sich das Objekt im Bezug zum Startpunkt befindet, genauer: die Differenz der beiden Positionen. Zudem: Die Beschleunigung $a(t)$ ist die momentane Änderung der Geschwindigkeit. Ist diese Änderung positiv, so beschleunigt das Objekt. Ist diese Änderung negativ, so bremst das Objekt. Das Integral $\int_c^d a(t)\,dt$ ist also die Geschwindigkeitsdifferenz im Zeitintervall.

Lehrer:

Erklären Sie einem Laien, weshalb der Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt.

Schüler:
Wenn man bei der Funktion im Intervall [a,b] einen kleinsten Funktionswert nimmt (tiefster Punkt des Graphen), kann man diesen Funktionswert mit dem x-Abschnitt im Intervall [a,b] mul-

tiplizieren, also $f(x_1)$*(b-a). Somit entsteht geometrisch gesehen eine Fläche. Wenn man diese Prozedur noch für einen höchsten Funktionswert ($f(x_2)$) anwendet, erhält man wieder eine Fläche. Nun ist es logisch, dass die Fläche des tiefsten Funktionswerts kleiner ist als die Fläche des grössten Funktionswert und dass der Flächeninhalt der Fläche, welche durch das Integral bestimmt wird, dazwischen liegt. Bei einer stetigen Funktion gibt es dann sicherlich eine Zahl, mit welcher man (b-a) multiplizieren kann, damit man den Flächeninhalt des Integrals bekommt. Diese Zahl muss logischerweise zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegen. Daraus folgt, dass der Mittelwertsatz stimmt.

4.) Aufgaben

<u>Lückenfüller!</u>

Bitte füllen Sie die folgenden Lücken. Bei a) und b) stehen im Kasten die einzufüllenden Wörter bereit.

a) Bei einer Funktion wird $\boxed{\quad\quad}$ Element der Definitionsmenge $\boxed{\quad\quad}$ ein Element der Wertemenge zugeordnet. Dabei kann es vorkommen, dass mehrere oder $\boxed{\quad\quad}$ Elemente der Definitionsmenge $\boxed{\quad\quad}$ Element der Wertemenge zugeordnet werden. Umgekehrt dürfen aber einem Element der Definitionsmenge nie $\boxed{\quad\quad}$ oder $\boxed{\quad\quad}$ Elemente der Wertemenge zugeordnet sein.

demselben	genau	jedem	alle	mehr	zwei

b) Der Zinsertrag eines (fixen) Kapitals ist eine Funktion der $\boxed{\quad\quad}$. Bei konstanter Geschwindigkeit ist die Wegstrecke eine Funktion der $\boxed{\quad\quad}$. Die Prüfungsnote ist eine Funktion der $\boxed{\quad\quad}$. Vereinfacht ausgedrückt ist der Bremsweg eine Funktion der $\boxed{\quad\quad}$.

Laufzeit	Geschwindigkeit	Punktzahl	Fahrzeit

c) Die Funktion f ordnet jeder reellen Zahl die fünfmal grössere reelle Zahl zu. Mit mathematischen Symbolen beschreibt man diesen Sachverhalt so: $\boxed{\quad\quad}$ oder, ganz ausführlich, $\boxed{\quad\quad}$.
Der Funktionswert an der Stelle 3 wird mit dieser Symbolkette notiert: $\boxed{\quad\quad}$.
Das Urbild von 90 wäre in diesem Fall die Zahl $\boxed{\quad}$. Das Bild von 12 wäre in diesem Fall $\boxed{\quad}$. An der Stelle 6.2 hat die Funktion den Wert $\boxed{\quad}$. Unter dieser Funktion wird die Zahl $\boxed{\quad}$ auf 18 abgebildet.

d) Gegeben sei die Funktion $f: x \mapsto \pi \cdot x^2$, die jedem Radius x $(x \geq 0)$ den Flächeninhalt des Kreises mit ebendiesem Radius zuordnet. Die Definitionsmenge dieser Funktion ist also $\boxed{}$, die Wertemenge ist $\boxed{}$. Die Variable x heisst auch $\boxed{}$ Variable. Verdoppelt man bei dieser Funktion den Input, so wird der Output $\boxed{}$.

e) In einer Rekordfahrt vom 26. Mai 2001 legte der TGV 531 die 1067.2 Streckenkilometer zwischen Calais und Marseille mit einer Durchschnittsgeschwindigkeit von 306.37 km/h zurück. Die Funktion, die einer Anzahl Stunden nach Beginn der Fahrt die durchschnittliche Anzahl zurückgelegter Kilometer zuordnet, lässt sich durch folgende Funktionsgleichung ausdrücken: $\boxed{}$. Die unabhängige Variable ist $\boxed{}$, die abhängige ist $\boxed{}$. Diese Funktion ordnet der Zahl 1[h] die Zahl $\boxed{}$ zu. Das Urbild von 1531.85 [km] ist $\boxed{}$. An der Stelle 1.5[h] hat die Funktion den Wert $\boxed{}$.

Shaken, not stirred!

Die einzelnen Sätze einer Erklärung eines mathematischen Sachverhalts sind leider durcheinander geraten. Können Sie die ursprüngliche Reihenfolge wiederherstellen?

(i) Diese Zuordnung ist sicher eine Funktion, und ihr Definitionsbereich ist die Menge aller Tage des betrachteten Jahres.
(ii) Und eine solche „mehrwertige" Zuordnung ist bei einer Funktion nicht zulässig.
(iii) Würde man dagegen umgekehrt einer Temperatur den Tag zuordnen wollen, so wäre das sicherlich keine Funktion mehr.
(iv) Eine Funktion ist also nicht automatisch „umkehrbar".
(v) Wir betrachten ein bestimmtes Jahr und ordnen jedem Tag die höchste an diesem Tag gemessene Temperatur zu.
(vi) Denn es kann ja durchaus mehrere Tage geben, an denen dieselbe höchste Temperatur gemessen wurde.
(vii) Die Funktionswerte dieser Funktion können sowohl positive als auch negative Zahlen sein.

Korrekte Reihenfolge: (v) → → → → → →

Wahr oder falsch?

Entscheiden Sie für jede dieser Behauptungen, ob sie zutrifft oder nicht. Und begründen Sie Ihren Entscheid.

a) Jede beliebige Kurve ist Graph einer geeigneten Funktion.

b) Sei $f: x \mapsto a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ eine Funktion mit reellen Parametern a, b, c. Es ist möglich, a, b, c so zu wählen, dass der Graph eine Gerade ist.

c) Die Funktion $y=\sqrt{x+6}$ ist definiert für alle $x \geq -6$.

d) Der Graph der Funktion $y=x^3$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

e) Der Graph der Funktion $y=x^4$ ist achsensymmetrisch bezüglich der y-Achse.

f) Der Graph der Funktion $y=x^5$ ist punktsymmetrisch bezüglich dem Origo.

g) Anna hat den Graphen der Funktion $y=f(x)$ gezeichnet. Herbert möchte den Graphen der Funktion $y=f(x)+5$ zeichnen. Dazu muss er lediglich Annas Graphen um 5 Einheiten in y-Richtung (also nach oben) verschieben.

h) Andreas hat den Graphen der Funktion $y=g(x)$ gezeichnet. Jacqueline möchte den Graphen der Funktion $y=g(x+5)$ zeichnen. Dazu muss sie lediglich Andreas' Graphen um 5 Einheiten in x-Richtung (also nach rechts) verschieben.

i) Angenommen, die Funktion $p(x)=1000\cdot 0.95^x$ gibt den Luftdruck in der Höhe x (in Kilometern über Meer) an. Dann ist offenbar der Druck umso grösser, je grösser x ist.

j) Angenommen, die Funktion $p(x)=1000\cdot 0.95^x$ gibt den Luftdruck in der Höhe x (in Kilometern über Meer) an. Dann sinkt der Luftdruck offenbar alle 1000 Meter um 95%.

k) Angenommen, die Funktion $p(x)=1000\cdot 0.95^x$ gibt den Luftdruck in der Höhe x (in Kilometern über Meer) an. Dann sinkt der Luftdruck offenbar alle 1000 Meter um 5%.

<u>Anwenden!</u>

1) Welche der folgenden Funktionen sind linear? Bringen Sie jede der linearen Funktionen in die Normalform $y=a\cdot x+b$:
   a) $y=4-5x$
   b) $y=\dfrac{2x+5}{3}$
   c) $y=\dfrac{3}{x+7}$
   d) $y=-3\cdot(8-5x)$
   e) $y=\dfrac{1}{4}\cdot(x-7)$
   f) $y=x\cdot(x-7)$
   g) $y=-\dfrac{x-9}{3}$

2) Die folgenden Datenlisten enthalten einige Messwerte, die in gleichen Zeitabständen erhoben worden sind:

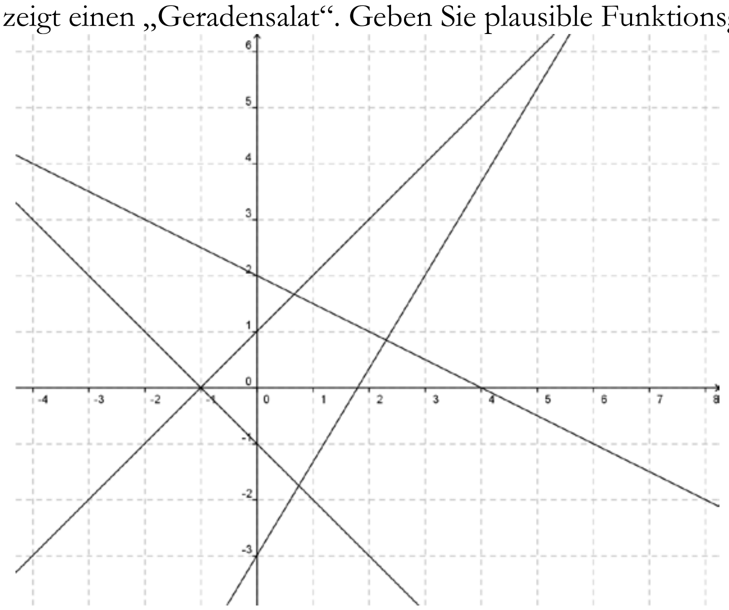
U={20.5, 19.6, 18.7, 17.8, 16.9, 16.0}
V={102, 71, 40, 9, -22, -53, -85, -117}
W={20, 19, 18, 18, 16, 16, 16}
X={1,4,9,16,25,36,49}
Y={100, 70, 40, 10, -20, -50, -80, -110}
Z={1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256}
In welchen Fällen liegt lineares Wachstum vor? Versuchen Sie, das Wachstum auch in den anderen Fällen formal zu beschreiben.

3) Konstruieren Sie die Graphen der folgenden Funktionen, aber nur, wenn sie *linear* sind!
   a) $f(x) = 2x - 5$
   b) $g(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{2}$
   c) $h(x) = 0.6x - 2$
   d) $k(x) = 2x^2 - 3$
   e) $l(x) = \frac{1}{2}(5 - x)$
   f) $m(x) = -\left(x - \frac{3}{4}\right)$

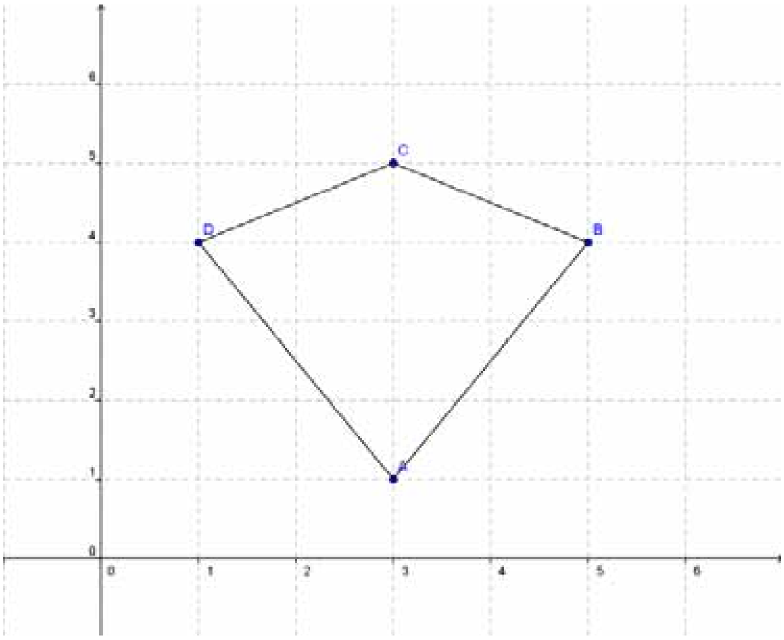
4) Von einer linearen Funktion *f* wissen wir, dass ihr Graph die Steigung 2 hat. Falls zudem $f(1) = 1$ ist, welchen Funktionswert hat die Funktion dann an der Stelle 2, an der Stelle 3, an der Stelle 24?

5) Konstruieren Sie die vier Graphen der folgenden Funktionen im selben Koordinatensystem. Was lässt sich beobachten, und wie lässt sich diese Beobachtung erklären?
   $f(x) = 2x + 3$ $\quad g(x) = \dfrac{3 - x}{2}$ $\quad h(x) = 2x - 3$ $\quad k(x) = -\dfrac{x + 3}{2}$

6) Die Abbildung zeigt einen „Geradensalat“. Geben Sie plausible Funktionsgleichungen an.



7) Die Abbildung zeigt Ausschnitte aus Graphen linearer Funktionen. Finden Sie die zugehörigen Funktionsgleichungen?



8) Welchen Effekt hat eine Reduktion von Karbonat-Ionen (CO_3^{2-}) auf den Verkalkungsgrad von Korallenriffen? Ein Forscherteam untersucht den Zusammenhang zwischen der (aufgrund der Verbrennung fossiler Brennstoffe) sinkenden Karbonat-Ionen-Konzentration und dem Verkalkungsgrad von Korallen. Labormessungen an einem künstlichen Korallenriff haben auf folgende Messdaten geführt: $D_1(291\ ,\ 23)$ und $D_2(276\ ,\ 18)$. Dabei ist die *x*-Koordinate die Ionen-Konzentration in µmol/kg, und die y-Koordinate ist die Verkalkungsrate in mmol $CaCO_3$ pro Quadratmeter und Tag. Wenn die Forscher zudem von der Annahme ausgehen, dass zwischen beiden Grössen (lokal) ein linearer Zusammenhang besteht, so stellt sich nun die Frage, wie die lineare Funktion gefunden werden kann, deren Graph durch die beiden gegebenen Punkte führt?

9) Finden Sie die Funktionsgleichung derjenigen linearen Funktion, deren Graph durch die Punkte A und B führt!

   a) A(0 , 3), B(1 , 5)
   b) A(1 , 1), B(3 , 3)
   c) A(-3 , 8), B(4 , 4.5)
   d) A(-4 , -10), B(3 , 0.5)
   e) A(4 , -2), B(4 , 7)
   f) A(-2.3 , 3.4), B(5.7 , 1.8)
   g) A(-4.4 , -5.5), B(6.6 , 7.7)

10) Von einer linear wachsenden Grösse l ist bekannt, dass $l(2)=4$ und $l(10)=1024$ ist

   a) Begründen oder widerlegen Sie: $l(7)=\frac{1}{2}\cdot\left(l(4)+l(10)\right)$.

   b) Für welche Zahlen $a,\ b$ gilt: $l(t)=a\cdot t+b$?

11) Für welche lineare Funktion *f* gilt: $f(0.375)=1$ und gleichzeitig $f(-0.625)=-2$?

12) In einer schriftlichen Mathematikprüfung können maximal 60 Punkte erreicht werden. Der Lehrer beschliesst, für 0 Punkte Note 1 und für 54 Punkte Note 6 zu geben; für alle anderen Punktzahlen sollen die Noten durch die Werte einer linearen Funktion ergänzt werden. Welche lineare Funktion ist dazu nötig?

13) Begründen oder widerlegen Sie: Sind f und g zwei lineare Funktionen und sind k und l zwei beliebige reelle Konstanten, so ist auch die Funktion $h(x) := k \cdot f(x) + l \cdot g(x)$ linear.

14) Jemand behauptet: Die drei Punkte P(-4 , -10), Q(90 , 37), R(300 , 145) liegen alle auf einer Geraden. Trifft das zu?

15) ABCD sei ein Parallelogramm. Bekannt ist, dass AB auf dem Graphen von $g(x) = \frac{1}{2}x$ und dass AD auf dem Graphen von $h(x) = 3x$ liegt; und ferner dass C=(3 , 7). Berechnen Sie die Koordinaten der Ecken A,B,D.

16) Bezeichnen wir die Länge eines Rechtecks mit x und die Breite mit y. Angenommen, unser Rechteck muss einen Umfang von 40 Längeneinheiten aufweisen, wie hängt dann die Breite des Rechtecks von seiner Länge ab? Geben Sie eine Funktion an, die jeder möglichen Länge x die zugehörige Breite y zuordnet, und analysieren Sie sie.

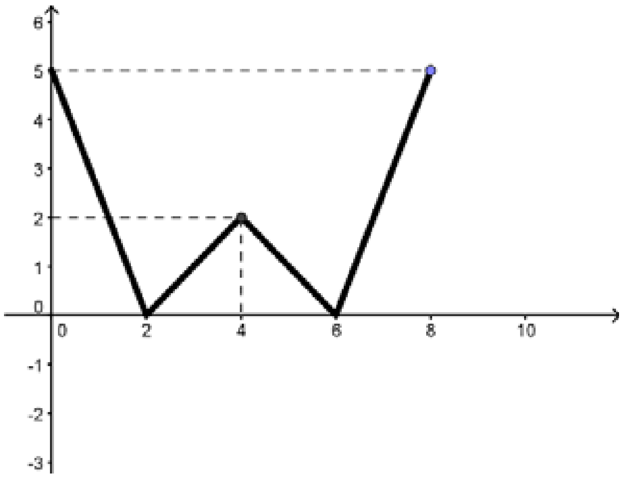
17) Ein Handwerker, den wir für eine Reparatur in unserem Haus angefragt haben, informiert uns, dass er 45 Euro für den Anfahrtsweg berechnet und dann 80 Euro pro Stunde. Wie lautet die lineare Funktion, die der Anzahl Stunden den Gesamtpreis zuordnet? Und wie sieht der Graph aus?

18) Wir planen, ein Auto zu mieten und informieren uns darum bei zwei Autovermieterfirmen über die Konditionen. Bei Anbieter A hätten wir eine Grundgebühr von 150 Euro und zudem 24 Cents pro Kilometer zu zahlen. Bei Anbieter B hätten wir eine Grundgebühr von nur 30 Euro, aber dafür 36 Cents pro Kilometer zu entrichten. Bei welcher Kilometerzahl ist welcher Anbieter günstiger?

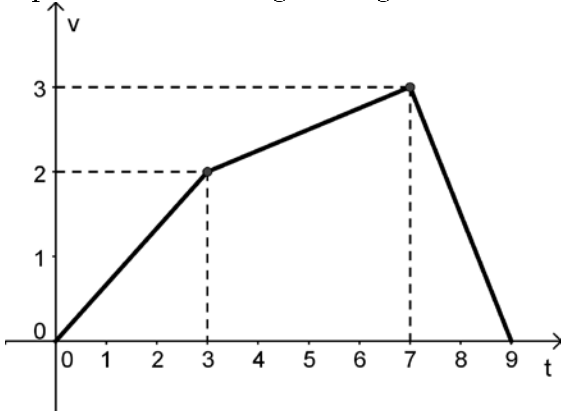
19) Polizeikontrollen registrieren einen bestimmten Autofahrer zweimal auf derselben Autobahn, einmal bei Kilometer 35 um 12:05 Uhr und das zweite Mal bei Kilometer 58 um 12:17 Uhr. Mit welcher durchschnittlichen Geschwindigkeit fuhr der Autofahrer in diesem Autobahnabschnitt? Was hat diese Fragestellung mit linearen Funktionen zu tun?

20) Auf einer Luftkissenbahn wird ein Düsengleiter angestossen, und dann passiert er zum Zeitpunkt $t = 0$ die Position 0 und bewegt sich reibungsfrei mit der konstanten Geschwindigkeit v. Wie lautet die Funktion, die der Zeit die vom Gleiter zurückgelegte Wegstrecke zuordnet? Skizzieren Sie den Graphen für $v = 0.2$ m/s, für $v = 0.4$ m/s und für $v = 0.6$ m/s.

21) Die Firma Wunderli plant ein neues Firmenlogo in Form des abgebildeten Buchstabens ‚W'. Können Sie die stückweise definierte Funktion angeben, deren Graph genau so aussieht wie dieses ‚W'?



22) Zu einer bestimmten Bewegung gehört das abgebildete Geschwindigkeit-Zeit-Diagramm. Berechnen Sie die Beschleunigungen in den drei Teilintervallen, und geben Sie für jedes lineare Teilstück des Graphen die Funktionsgleichung an.



23) Bestimmen Sie die exakten Zeitpunkte, zu denen der Minuten- und der Stundenzeiger einer Uhr jeweils genau übereinander stehen.

24) Lorenzo und Felix machen ein Velorennen. Felix lässt Lorenzo einen Vorsprung von 200 Metern. Dann starten beide gleichzeitig, Lorenzo mit 18 km/h und Felix mit 27 km/h. Zeichnen Sie die zugehörigen Weg/Zeit-Funktionen in einem Koordinatensystem auf, und berechnen Sie die Orte beider Fahrer nach 40 Sekunden sowie den Zeitpunkt, an dem Felix Lorenzo einholt.

25) Die 2-Tupel $(m;n)$, wobei $m, n \in \mathbb{N}_0$ sollen hier *Gitterpunkte* heissen. Wir betrachten nun Graphen linearer Funktionen, die durch den Origo gehen. Gibt es Graphen, auf denen kein einziger Gitterpunkt liegt? Falls ja: Welche?

Forschen

1) Objekte, die durch die Luft bewegt sind, sind bekanntlich einem bremsenden Luftwiderstand ausgesetzt. Nehmen wir einmal an, das Objekt (zum Beispiel ein Auto) habe einen Querschnitt der Fläche A und bewege sich mit der Geschwindigkeit v eine bestimmte

Strecke *s* weit. Die vor ihm liegende Luft muss weggeschoben werden, das heisst, das Objekt verrichtet an der Luft eine Beschleunigungsarbeit von

$$W = F_L \cdot s \qquad (1)$$

Dadurch erhält die Luft die kinetische Energie

$$E_{kin} = \frac{1}{2} \cdot m_L \cdot v_L^2 = \frac{1}{2} \cdot A \cdot s \cdot \rho \cdot v_L^2 \qquad (2)$$

Die Geschwindigkeit der Luft entspricht sicher nur angenähert der Geschwindigkeit des Objekts. Tatsächlich hängt es von der Form des Objektes ab, „wie viel von *v* sich auf die Luft überträgt". Wir setzen deshalb $v_L^2 = c_w \cdot v^2$ und nennen c_w den **Widerstandsbeiwert**. Setzen wir dies in (2) ein und setzen wir überdies (1) und (2) einander gleich, so erhalten wir die bekannte Formel für den Luftwiderstand:

$$\boxed{F_L = \frac{1}{2} \cdot c_w \cdot A \cdot \rho \cdot v^2}$$

a) Begründen Sie die Gleichungen (1) und (2).
b) Interpretieren und nottieren Sie diese Formel als Funktion in der Variablen *v*, und analysieren Sie ihren Graphen.

2) Skizzieren Sie in einem Koordinatensystem den Punkt *F*(0 , 1) sowie die Gerade $l: y = -1$. Welche formale Eigenschaft erfüllen alle Punkte $P(x, y)$, die von *F* und *l* denselben Abstand haben? Stellen Sie die Menge dieser Punkte auch graphisch dar.

Tun Sie nun dasselbe für den Punkt $F(0, s)$ und die Gerade $l: y = -s$ (für ein beliebiges positives *s*).

Die vorangehenden Aufgaben lassen verstehen, weshalb die Parabel häufig auch so definiert wird: Eine **Parabel** ist die Menge aller Punkte *P*, die vom sogenannten **Brennpunkt** (**Fokus**) $F(0, s)$ und der sogenannten **Leitgeraden** $l: y = -s$ denselben Abstand haben. Sehen Sie ein, dass die Punkte des Graphen von $y = a \cdot x^2$ denselben Abstand vom Punkt $F\left(0, \frac{1}{4a}\right)$ und der Geraden $l: y = -\frac{1}{4a}$ haben.

3) Der Graph der quadratischen Funktion $y = a \cdot x^2$ hat die interessante Eigenschaft, dass jeder parallel zur y-Achse einfallende Strahl an der (verspiegelt gedachten) Parabel zum Brennpunkt reflektiert wird oder dass jeder vom Brennpunkt ausgehende Strahl nach Reflexion an der Parabel parallel zur y-Achse nach aussen geführt wird. Die Technik nützt

diese Eigenschaft in diversen Varianten aus: Solarkocher, Scheinwerfer, Parabolspiegel, Fotovoltaik-Anlagen und so weiter benutzen oftmals die Parabelform.

Weisen Sie die hier behauptete Eigenschaft nach.

Quellen

[Ap1]: Carmela Aprea e.a., *Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation*, in: Learning and Instruction 13, 2003, pp. 191 – 203

[Ba1]: Armin P. Barth, *Ereignis Unterricht*, Klett und Balmer AG, Zug, 2007

[Ba2]: Armin P. Barth, *Abschalten!*, in: Bildung Schweiz, Ausgabe 2/2012

[Bar1]: Felipe Barrera-Osorio, *The use and misuse of computers in education: evidence from a randomized experiment in Columbia*, World Bank Policy Research Working Paper Series, 2009

[Be1]: Anurag Behar, *Limits of ICT in Education*, LiveMint.com, Dec. 16, 2010

[Cu1]: Larry Cuban, *Teachers and Machines: the Classroom use of technology since 1920*, Teachers College Press, 1986

[De1]: Krista E. DeLeeuw e.a., Cognitive consequences of making computer-based learning activities more game-like, in: Computers in Human Behavior 27, 2011, pp. 2011 - 2016

[Go1]: Adam Gorlick, *Media Multitaskers pay mental price, Stanford Study shows*, Stanford University News, August 24, 2009

[Ha1]: J. Haack, *Interaktivität als Kennzeichen von Multimedia und Hypermedia*, in: L. J. Issing & P. Klimsa (Hrsg.), Information und Lernen mit Multimedia, pp. 151 – 166, Beltz Psychologie Verlags Union, Weinheim, 1995

[Me1]: Gisela Meyer Stüssi (Vizepräsidentin VSG), *Offenheit – Provokation*, in: Gymnasium Helveticum Nr. 1/12, p.29

[Mo1]: Roxana Moreno, *Learning in High-Tech and Multimedia Environments*, University of New Mexico, in: *Current Directions in Psychological Sciences*, Volume 15, number 2, 2006

[Op1]: Todd Oppenheimer, *The flickering mind: the false promise of technology in the classroom and how learning can be saved*, New York, Random House, 2003

[Sa1]: A. Santiago e.a., *Evaluacion experimental del programa "Una laptop pro Nino" en Peru*. Washington DC: Banco Interamericano de Desarrollo, 2010

[Sc1]: Ralph Schuhmacher (Hrsg.), *Macht Mozart schlau? Die Förderung kognitiver Kompetenzen durch Musik*, Bildungsforschung Band 18, Bundesministerium für Bildung und Forschung, Berlin, 2006

[Sch1]: Anja Schulthess, *Mit den Ohren beim Dozenten und den Augen auf dem Laptop- Multitasking im Hörsaal oder die Granzen der Aufnahmefähigkeit*, Neue Zürcher Zeitung, 16. Mai 2011

[Sp1]: Manfred Spitzer, *Kinder lernen besser ohne Computer*, Interview in: Der Tagespiegel, 22. 06. 2007

[St1]: Elsbeth Stern e.a., *Erziehungs- und Schulpsychologie*, in: K. Pawlik (Hrsg.), *Handbuch Psychologie; Wissenschaft – Anwendung – Berufsfelder*, Springer, Heidelberg, 2006

[St2]: Elsbeth Stern e.a., *Lernziel: Intelligentes Wissen*, Universitas 2/2004, pp. 121 – 134

[St3]: Elsbeth Stern, *Trendsport Gehirnjogging – oder: Warum man sein Gehirn nicht wie einen Muskel trainieren kann*, GEO, 03/2012, pp. 86,87

[St4]: Elsbeth Stern, *Lernen – der wichtigste Hebel der geistigen Entwicklung*, Universitas 5/2003

[St5]: Elsbeth Stern e.a., *Transfer*, in: D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch: Pädagogische Psychologie*, Beltz-Verlag, Weinheim, 2006

[St6]: Elsbeth Stern, *Mission impossible: Attraktive Naturwissenschaften*, Kolumne, ETH Zürich, 08. 02. 12

[St7]: Elsbeth Stern, *Unmotiviert sein ist kein Schicksal*, Kolumne, ETHZ, 18. 01. 2012

[To1]: Kentaro Toyoma, *There are no technology shortcuts to good education*, Educational Technology Debate, ICT in Schools, January 2011

[Wa1]: Mark Warschauer, *Laptops and Literacy: Learning in the wireless classroom*, Teachers College Press, 2006