Spielend Mathematik lernen

Ein Lehrtext von Armin P. Barth

Inhalt und Lernziele:
In folgenden Lehrtext werden Spiele zum Anlass genommen, um typische Konzepte, Denkvorgänge und Methoden aus der Mathematik zu erläutern.

Unterrichtsmethode: Lehrtext
Es handelt sich um einen an Lehrpersonen gerichteten Lehrtext.

Fachliches Review:
Urs Kirchgraber, Professur für Mathematik, ETH Zürich

Fachdidaktisches Review:
Urs Kirchgraber, Professur für Mathematik, ETH Zürich

Publiziert auf EducETH:
8. Juni 2007

Spielend Mathematik lernen

Armin P. Barth

Zusammenfassung: In fünf voneinander unabhängigen Kapiteln werden Spiele zum Anlass genommen, für die Mathematik typische Konzepte, Denkvorgänge und Methoden zu erläutern. Die Mathematik ermöglicht aufschlussreiche originale Begegnungen. Sie verlässt sich stark auf die axiomatische Methode. Sie benutzt heute mehr denn je Algorithmen und analysiert diese. Sie dringt in immer neue Gebiete ein und beschert diesen immer komplexere alltagspraktische Anwendungen. Solche und verwandte Aspekte stehen in den folgenden Kapiteln im Zentrum; herausgebildet werden sie an zahlreichen Beispielen aus der Spieltheorie.

1. Ein Häppchen Geschichte

Spiele scheinen die Menschen immer schon und überall auf der Welt beflügelt zu haben. Sie befriedigen gleich einen ganzen Strauss von Bedürfnissen, die wenigstens teilweise jedem Menschen eigen sind: die Bedürfnisse nach Aufregung und Überlegenheit, nach Spannung und Gier, nach Hoffnung und Aberglauben, nach Kampf und Sieg.

Schon früh in der Geschichte der Menschheit haben Spiele im alltäglichen Leben eine Rolle gespielt. Die vermutlich ältesten Funde, die diese These stützen, sind polierte und markierte *Astragalus-Knöchelchen*, die bei mehreren archäologischen Grabungen im Gebiet der ehemaligen Assyrer, Sumerer, Babylonier und Ägypter gefunden wurden. Dabei handelt es sich um den kleinen Knochen gleich oberhalb des Fersenknochens bei Schafen und anderen Tieren vergleichbarer Grösse, und er hat den Vorteil, dass er auf vier unterscheidbaren Flächen liegen bleiben kann, weswegen er sich gut als Spielwürfel eignet. Die vier Ergebnisse sind allerdings nicht gleichwahrscheinlich, so dass eine Zuordnung von Wahrscheinlichkeiten zu den einzelnen Ergebnissen nicht so einfach ist wie bei einem heute üblichen fairen Spielwürfel.

In [1] fand ich eine interessante Übersicht über den Ursprung vieler Spiele und Spielutensilien, die hier auszugsweise wiedergegeben wird:

Origins of Some Gambling-related Randomizers, Games and Activities		
Event	**Date of origin**	**Region of origin**
Astragalus	About 3600 BC	Middle East
Standard Die	About 2000 BC	Egypt and elsewhere
Playing Cards	10th Century	China
Roulette wheel	About 1800	France
Poker	About 1800	Louisiana territory
Backgammon (modern rules)	1743	England
Bingo	1880-1900	England, travelling carnivals
Lotteries	1st Century	Roman Empire
Life Insurance	1583	England
Horse race betting	16th Century	England

Chess	?BC – disputed 7th Century	? India
Go	About 1000	China

Es war nur eine Frage der Zeit, bis auch die Mathematik sich den Spielen annahm, und sie tat dies fast plötzlich im 17. Jahrhundert und seither unablässig mit Gewinn und Vergnügen. Hier sind die wichtigsten Protagonisten des 1. Aktes des Spieltheorie, berühmte Forscher mit damals ganz neuen und überraschenden Ideen:

- G. CARDANO: „*The book on Games of Chance*"
  (um 1520, publ. 1663)
- B. PASCAL / P. DE FERMAT: berühmt gewordene Korrespondenz über Wahrscheinlichkeit im Zusammenhang mit Spielen (1654)
- B. PASCAL: Es lohnt sich eher, an Gottes Existenz zu glauben, als nicht daran zu glauben! (in den „*Pensées*", 1658)
- C. HUYGENS. „*Calculating in Games of Chance*"
  (1657, Wahrscheinlichkeitstheorie)
- G. W. LEIBNIZ: diverse Beiträge zur Wahrscheinlichkeitsrechnung
- JAKOB BERNOULLI: „*Ars Conjectandi*"
  (1690, publ. 1713, Wahrscheinlichkeitstheorie)

Man kann ruhig sagen, dass die *Wahrscheinlichkeitsrechnung* ihren Anfang in der Untersuchung von Spielen nahm. Nicht selten sind sehr alltägliche, sehr praktische Fragen dafür verantwortlich, dass Mathematikerinnen und Mathematiker neue Theorien entwickeln, die fortan zahlreiche Anwendungen finden. Um Wahrscheinlichkeitsrechnung geht es in dieser Arbeit gerade nicht, sondern um andere Aspekte der Spieltheorie. Daher möchte ich auf die hier erwähnten Originalarbeiten mit einer Ausnahme nicht weiter eingehen. Die Ausnahme ist BLAISE PASCALS Überlegung zu der Frage, ob es sich eher lohnt, an Gottes Existenz zu glauben, oder nicht. Natürlich ist diese Frage (und die Art der Beantwortung) aus heutiger Sicht etwas exotisch; gerade deswegen scheint mir ein genaueres Hinsehen aber interessant.

Pascal geht davon aus, dass die Wahrscheinlichkeit für Gottes Existenz nicht Null ist; sonst erübrigt sich seine Frage ohnehin. Sei also p die Wahrscheinlichkeit für Gottes Existenz, und sei $p > 0$. Es gibt offensichtlich zwei Fälle: Ich glaube an Gottes Existenz, oder ich tue das nicht. Im ersten Fall ordnet PASCAL mir einen positiven payoff a zu, falls Gott in Wirklichkeit existiert, und einen negativen payoff $-b$, falls Gott nicht existiert. Der „payoff" stellt eine Art persönlichen Gewinn dar, meine irdische und himmlische Belohung für meinen Glauben. Da ich mit Wahrscheinlichkeit p den Gewinn a und mit der Gegenwahrscheinlichkeit $1-p$ den Gewinn $-b$ erziele, darf ich insgesamt den Gewinn $a \cdot p + (-b) \cdot (1-p)$ erwarten; dies nennt man den *Erwartungswert*, und es ist jedenfalls ein endlicher Wert.

1.Fall („glauben"):

	Gott existiert	Gott existiert nicht
payoff	$a > 0$	$-b$ (für $b > 0$)
Wahrscheinlichkeit	p	$1-p$

Erwartungswert: $a \cdot p + (-b) \cdot (1-p)$

Falls ich nicht an Gottes Existenz glaube, ordnet mir PASCAL einen payoff von $-\infty$ zu für den Fall, dass Gott in Wirklichkeit existiert. Dies ist das mathematische Äquivalent ewiger Verdammnis. Für den Fall, dass Gott nicht existiert – in Übereinstimmung mit meinem Glauben – erhalte ich einen positiven payoff c. Insgesamt ergibt sich dann der Erwartungswert $-\infty \cdot p + c \cdot (1-p) = -\infty$.

2.Fall („nicht glauben“):

	Gott existiert	Gott existiert nicht
payoff	$-\infty$	$c > 0$
Wahrscheinlichkeit	p	$1-p$

Erwartungswert: $-\infty \cdot p + c(1-p) = -\infty$

Da im zweiten Fall der Erwartungswert $-\infty$ ist, während er im ersten Fall wenigstens endlich ist, schliesst PASCAL, dass es sich jedenfalls eher lohnt, an Gottes Existenz zu glauben, als das nicht zu tun, eine Argumentation, die natürlich steht und fällt mit der Wahl der payoffs...

Dass Spielen nicht immer ganz unproblematisch ist, zeigt schon das Beispiel von CARDANO. In seinem weiter oben erwähnten Buch schreibt er:

> *„You should play rarely and for short periods, in a suitable place, for small stakes, and on suitable occasions, or at a holiday banquet.“*

In seinem eigenen Leben schien er sich aber selber nicht an diese Ratschläge gehalten zu haben, wie einer Stelle aus seiner Autobiographie entnommen werden kann:

> *„From my youth I was immeasurably given to table games (...) But through the long years I devoted to them, nearly forty, it is not easy to tell how many of my possessions I have lost without compensation. But the dice treated me even worse, because I instructed my sons in the game and opened my house to gamblers.”*

Dass Spiele auch süchtig machen können, ist uns spätestens seit der Gründung der ersten internationalen Hilfsorganisation gegen Spielsucht bewusst, die im Jahr 1947 in Kalifornien unter dem Namen “*Gamblers Anonymous*” gegründet wurde. Dennoch überwiegt der positive Aspekt des Spielens zweifellos; FRIEDRICH VON SCHILLER fand sogar, der Mensch sei nur dort ganz Mensch, wo er spiele.

2. MU – ein Einblick in Kalküle

Das MU-Spiel fand ich in [2], und es eignet sich hervorragend, um zu zeigen und zu thematisieren, was ein *Kalkül* ist. Es wurde ja eigens zu diesem Zweck erfunden. Hier sind die Spielregeln:

- Das Spiel benutzt das Alphabet A:={M, I, U}.
- Ein *Wort* ist eine endliche Kette von (konkatenierten) Symbolen aus A.
- Die Axiomenmenge ist S:={MI}.
- Es gibt vier Schlussregeln:
  R1: $\boxed{\text{...I}} \rightarrow \boxed{\text{...IU}}$
  R2: $\boxed{\text{Mx}} \rightarrow \boxed{\text{Mxx}}$
  R3: $\boxed{\text{...III...}} \rightarrow \boxed{\text{...U...}}$
  R4: $\boxed{\text{...UU...}} \rightarrow \boxed{\text{......}}$

Das muss sofort erläutert werden: Das Alphabet besagt, dass wir lediglich die Buchstaben M, I und U benutzen dürfen. Aus ihnen dürfen wir aber beliebig lange Ketten bilden, etwa die folgenden:

MIU, MIIIUUUUUU, IIII, MUMUMUMUMUMUMU, IU, usw.

All dies sind erlaubte „Wörter“. Die Axiomenmenge, hier S genannt, enthält nur das eine Wort MI; dass es ein Axiom ist, bedeutet, dass wir ohne Beweis davon ausgehen, dass MI gilt, wahr ist, zutrifft. Wir setzen MI voraus, akzeptieren es als Grundgesetz, halten es für richtig. Die vier Schlussregeln sind die Spielregeln, an die wir uns halten müssen. Jede Umformung eines Wortes muss immer nach einer dieser Regeln passieren!

Regel 1 besagt, dass einem Wort, welches auf I endet, ein U angefügt werden darf. Daher wäre etwa die folgende Umformung regelkonform:

MUI → MUIU

Regel 2 besagt, dass bei einem Wort, welches mit M beginnt, der gesamte auf das erste M folgende Wortteil (hier mit x dargestellt) verdoppelt werden darf. Daher wäre etwa die folgende Umformung regelkonform:

MUUI → MUUIUUI

Regel 3 besagt, dass drei aufeinander folgende Buchstaben I jederzeit durch ein U ersetzt werden dürfen. Daher wäre etwa die folgende Umformung regelkonform:

MUUIIIU → MUUUU

Regel 4 schliesslich besagt, dass zwei aufeinander folgende Buchstaben U jederzeit ersatzlos gestrichen werden dürfen. Daher wäre etwa die folgende Umformung regelkonform:

MIIUUI → MIII

Nun kann das Spiel beginnen. Unsere Aufgabe ist es zunächst, möglichst viele gültige (wahre, zutreffende,...) Wörter zu erzeugen. Da zu Beginn einzig das Axiom MI als gesichert gilt, bleibt uns nur die Wahl, mit MI zu beginnen. Was kann man aus MI schliessen? Wir könnten zum Beispiel Regel 1 benutzen und auf MIU schliessen. Oder wir könnten Regel 2 benutzen und MII erzeugen. Damit kennen wir dann schon drei gesicherte, gültige Wörter, nämlich:

MI, MIU und MII

Sie alle dürfen bei weiteren Herleitungen als gesichert benutzt werden, da wir ja für jedes dieser Wörter (ausser für das Axiom MI) eine Herleitung kennen und bei Bedarf nachschlagen können. Die folgende Aufgabe bietet Gelegenheit, weitere gültige Wörter zu erzeugen; zusätzlich wird auch gefragt, wie gewisse Wörter „bewiesen", d.h. mit Hilfe der Regeln abgeleitet werden können.

Die Pointe ist nun die folgende: Das Spiel bildet in sehr einfacher Weise Tätigkeiten ab, die sehr typisch für die Mathematik sind. Eine der wichtigsten mathematischen Tätigkeiten ist das Beweisen von Sätzen in Kalkülen; die Mathematik bietet als einzige moderne Wissenschaft die Möglichkeit, Aussagen streng zu beweisen und die Beweise transparent, nachvollziehbar und schlüssig begründet zu gestalten. Ein mathematischer Beweis eines Satzes in einem Kalkül ist – genau genommen – nichts anderes als eine Abfolge von gut begründeten Schritten, wobei Axiome und früher bewiesene Sätze als gültig benutzt werden und als Begründungen vorgegebene Regeln des Schliessen herangezogen werden dürfen. Sich bewusst zu machen, welche Axiome und welche früher bewiesenen Sätze benutzt werden, um einen neuen Satz zu beweisen, und welche Arten von Schlussregeln herangezogen werden, hilft, den neuen Satz in seiner Tiefe zu verstehen und in seinem Umfeld einzuordnen.

Wenn wir im Spiel fragen, ob MUIIU wahr ist oder nicht, so entspricht das der typischen mathematischen Frage, ob eine bestimmte Vermutung wohl zutrifft oder nicht. Um das zu entscheiden, suchen wir einen Beweis für die Vermutung, gesetzt der Fall, wir glauben überhaupt an deren Wahrheit. (Sonst würden wir sie ja eher zu widerlegen versuchen.) Ein Beweis der Vermutung MUIIU besteht aus der Angabe einer konkreten Abfolge von begründeten Schritten, wobei wir das Axiom sowie schon bewiesene Sätze benutzen und als Begründungen die vier Schlussregeln heranziehen dürfen. Das sieht etwa so aus:

Vermutung: MUIIU
Beweis: MII wurde schon hergeleitet; wir dürfen also darauf aufbauen:

$$\text{MII} \underset{R2}{\rightarrow} \text{MIIII} \underset{R2}{\rightarrow} \text{MIIIIIIII} \underset{R3}{\rightarrow} \text{MIIIIIU} \underset{R3}{\rightarrow} \text{MUIIU.}$$

Jeder Pfeil symbolisiert einen Schritt des Beweises, und jeder Schritt kommt begründet zustande auf Grund einer der vier Regeln des Schliessens. Man könnte auch einen anderen Beweis angeben, obwohl dies natürlich nicht nötig ist. *Ein* Beweis genügt immer, um die Gültigkeit einer Aussage zu sichern. Es spiegelt aber die realistische Tatsache wider, dass verschiedene Mathematiker für ein und denselben Satz oft verschiedene Beweise finden, elegantere und weniger elegante. Ein anderer Beweis für MUIIU geht etwa so:
Beweis: MI ist ein Axiom und darf daher benutzt werden.

$$\text{MI} \underset{R2}{\rightarrow} \text{MII} \underset{R2}{\rightarrow} \text{MIIII} \underset{R1}{\rightarrow} \text{MIIIIU} \underset{R3}{\rightarrow} \text{MUIU} \underset{R2}{\rightarrow} \text{MUIUUIU} \underset{R4}{\rightarrow} \text{MUIIU.}$$

Welcher Beweis bevorzugt wird, ist oft eine Frage der Eleganz, des Geschmacks oder des Umfeldes, in dem der Satz vorkommt.

Aufgabe: Versuchen Sie, MU zu beweisen.

Unser Spiel hat einen weiteren grossen Vorteil: Es macht uns mit einer Situation vertraut, die in der Mathematik üblich, realistisch und höchst interessant ist, der Situation nämlich, dass es Aussagen gibt, die grundsätzlich nicht beweisbar sind. Sie sind nicht deswegen unbeweisbar, weil alle Mathematikerinnen und Mathematiker bis heute es nicht geschafft hätten; sie sind vielmehr *prinzipiell* unbeweisbar, wie clever man es auch anstellen mag. MU ist ein Beispiel einer solchen Aussage im Spiel. Bestimmt haben Sie es nicht geschafft, MU zu beweisen, nicht wahr! Enttäuschung über Ihren Misserfolg wäre aber ganz fehl am Platz, wird doch niemand einen Beweis für MU liefern können, heute nicht und nicht in 1000 Jahren.

Wie kann man das einsehen? Wie kann man beweisen, dass MU unbeweisbar ist? Es gehört zu den faszinierendsten Möglichkeiten der Mathematik, manchmal streng beweisen zu können, dass eine bestimmte Vermutung nicht bewiesen werden kann. So schwierig das zu sein scheint, es ist trotzdem oft möglich, und wir können wenigstens im Spiel (stellvertretend für reale Mathematik) zeigen, wie das geschafft werden kann. Wir behaupten also:

Behauptung: $\boxed{S=\{MI\} \underset{R1\text{-}R4}{\nvdash} MU}$

(In weniger formaler Sprache: Es ist unmöglich, aus der Axiomenmenge S mit Hilfe der Regeln R1 – R4 das Wort MU zu beweisen. Damit deuten wir auch an, dass es mit anderen Axiomen oder mit anderen Regeln schon gehen könnte. Beispielsweise könnten wir MU zum Axiom erheben, dann wäre ein Beweis von MU trivial. Oder wir könnten andere Regeln einführen, die eine Herleitung von MU erlauben würden. In unserem aktuellen Spiel ist eine Herleitung aber prinzipiell unmöglich.)

Um das zu beweisen, müssen wir zwingend die Sprache des MU-Spiels verlassen. Ein Beweis dieses Satzes kann ja nicht gelingen, wenn wir einzig Ketten der Buchstaben M, I und U auf ein Blatt schreiben. Wir müssen das Spiel verlassen, gewissermassen von oben auf das Spiel schauen, eine sog. *Metaebene* einnehmen und über das nachdenken, was wir innerhalb des Spiel-Systems tun. Das ist eine äusserst lohnenswerte Unternehmung; wir lernen, sauber und konsequent zu trennen, was innerhalb und was ausserhalb einer mathematischen Theorie passiert, lernen, *über* eine Theorie zu reden. Wir verstehen, dass die Regeln präzise zu befolgen sind, solange wir innerhalb des Kalküls arbeiten; dann aber, wenn wir über den Kalkül nachdenken, wenn wir alle Möglichkeiten eines denkendes Wesens ausschöpfen können, bieten sich plötzlich ganz andere Möglichkeiten wie etwa das Verwenden einer anderen Sprache, einer Skizze, einer Analogie, einer Simulation, usw. Und dann wird ein Beweis dieses Satzes plötzlich möglich:

Beweis:

Sei w ein beliebiges gültiges Wort des MU-Spiels, also ein Wort, welches aus S mit Hilfe der Regeln R1 – R4 ableitbar ist. Wir verfügen also auch über einen Beweis von w, und der Beweis startet bei MI, dem einzigen Axiom des Spiels. Sei G(w) der *I-Gehalt* des Wortes, d.h. die Anzahl Buchstaben I. (Beispielsweise hat das Wort MUIIU den I-Gehalt 2, weil zwei Buchstaben I darin vorkommen, MU selbst hat den I-Gehalt 0.) Wir zeigen, dass es sich bei w unmöglich um MU handeln kann und dass das am I-Gehalt liegt. Damit ist dann klar, dass MU kein beweisbares Wort sein kann:

Falls R2 und R3 im Beweis von w nie benutzt werden, ist G(w)=1, weil G(MI)=1 ist. Der I-Gehalt ist ja invariant bei Anwendung von R1 und R4. Somit ist MU unbeweisbar, wenn R2 und R3 nie benutzt werden. Anders gesagt: Soll MU bewiesen werden können, so muss man zwingend R2 und/oder R3 benutzen.

Wir setzen also voraus, dass R2 und/oder R3 mindestens einmal benutzt wird. Dann können wir untersuchen, wie sich der I-Gehalt im Laufe des Beweises von w ändert: Zu Beginn ist der I-Gehalt 1, weil der Beweis mit dem einzigen Axiom MI beginnt und G(MI)=1 ist. Jedes Mal, wenn R2 benutzt wird, verdoppelt sich der I-Gehalt, und jedes Mal, wenn R3 benutzt wird, verringert sich der I-Gehalt um 3. Folglich muss w einen I-Gehalt haben, der, bei 1 beginnend, durch einige Verdoppelungen sowie einige Reduktionen um 3 entsteht. Der entscheidende Punkt ist, dass am Ende der I-Gehalt niemals 0 sein kann!

Verdoppelungen führen nämlich auf eine Zweierpotenz, mehrere Reduktionen um 3 bilden ein Vielfaches von 3. Subtrahiert man von einer Zweierpotenz ein Vielfaches von 3, kann man niemals 0 erhalten, weil die Primfaktorzerlegung einer Zweierpotenz und die Primfaktorzerlegung eines Vielfachen von 3 sicher verschieden sind. Daher kann man kein Wort beweisen, welches einen I-Gehalt von 0 hat; insbesondere kann man MU nicht beweisen.

□

Der bekannte kanadische Mathematiker ABE SHENITZER sagte einmal zu mir, es dürfe nicht passieren, dass ein Schüler oder eine Schülerin das Gymnasium verlässt, ohne jemals die *axiomatische Methode* erlebt zu haben. Ich teile diese Ansicht, und ich denke, dass das MU-Spiel sich hervorragend dazu eignet, den zentralen Kern der axiomatischen Methode, die in der Mathematik eine so wichtige Rolle spielt, spielerisch zu erläutern: Die Mathematik baut im Fundament jeder ihrer Theorien auf Axiomen auf, Sätzen, die wir für richtig halten, die wir bereit sind zu akzeptieren, wie MI im Spiel. Aufbauend auf den Axiomen stösst man zu immer weiteren beweisbaren Sätzen vor, ist aber in der Lage, jeden Schritt jeder Herleitung zu begründen mit Hilfe von im voraus vereinbarten Regeln des Schliessens. Auf jeder höheren Stufe des so anwachsenden mathematischen Gebäudes stehen immer mehr gesicherte Sätze zur Verfügung; es ist dann nicht mehr nötig, beim Beweis neuer Sätze zurück bis zu den Axiomen zu gehen. Der englische Philosoph THOMAS REID schrieb einmal:

> *Mathematics, once fairly established on the foundations of a few axioms and definitions, as upon a rock, has grown from age to age, so as to become the most solid fabric that human reason can boast.*

Entscheidend ist, dass ein Fundament aus Axiomen *unerlässlich* ist; wir hätten unser Spiel ja auch nicht spielen können, ohne einen vorgegebenen Anfang, einen Startpunkt in Form des Axioms MI zu haben. Es wäre einfach nichts entstanden. Die Mathematik gründet also letztlich auf einem Element des Glaubens; wir glauben, dass die Wahl der Axiome vernünftig ist in dem Sinne, dass sie vernünftige, praktische, schöne, befriedigende Mathematik erzeugt. Ein solches Element des Glaubens wird nie verschwinden, solange die Mathematik die axiomatische Methode als Paradigma seriösen wissenschaftlichen Schliessens benutzt. Und daher gibt es auch in der Mathematik keine absolute Wahrheit. E. T. BELL schrieb einmal:

> *Mathematical „truth“ is no „truer“ than any other, and Pilate's question is still meaningless. There are no absolutes, even in mathematics.*

Das MU-Spiel lehrt uns also real funktionierende Mathematik, zeigt, was Axiome sind, was das Wesen eines Beweises ist, dass es Aussagen gibt, die nicht beweisbar sind, und dass dies beweisbar sein kann, demonstriert, was es heisst, innerhalb oder ausserhalb eines Kalküls zu arbeiten.

Zum Schluss soll hier noch ein Vergleich gezogen werden zu einem in der Mathematik oft benutzten Kalkül, der *Aussagenlogik*. Dieses „Spiel“ ist wie folgt aufgebaut:

- Es wird das Alphabet aus diesen Zeichen benutzt:
  $\neg$ (nicht), $\wedge$ (und), $\vee$ (oder), $\rightarrow$ (impliziert), $\leftrightarrow$ (äquivalent),),
  (, A_1, A_2, A_3,... (Die A_i heissen *Aussageformen*.)
- Wörter können so gebildet werden: Alle A_i sind Wörter. Ferner:
  Sind Φ und Ψ zwei Wörter, so sind auch $(\neg\Phi)$, $(\Phi \wedge \Psi)$, $(\Phi \vee \Psi)$, $(\Phi \rightarrow \Psi)$ und $(\Phi \leftrightarrow \Psi)$ Wörter. Nichts anderes ist ein Wort.
- Als Axiomenmenge S kann etwa das von HILBERT und BERNAYS in [3] benutzte System gewählt werden.
- Schlussregeln sind etwa:

Modus ponens:
$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi \rightarrow \Psi \\ \Phi \\ \hline \quad\Psi \end{array}}$$

Modus tollens:
$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi \rightarrow \Psi \\ \neg\Psi \\ \hline \quad\neg\Phi \end{array}}$$

Modus barbara :
$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi \rightarrow \Psi \\ \Psi \rightarrow \mathrm{X} \\ \hline \Phi \rightarrow \mathrm{X} \end{array}}$$

Resolution :
$$\boxed{\begin{array}{l} \Phi \vee \Psi \\ (\neg\Phi) \vee \mathrm{X} \\ \hline \quad\Psi \vee \mathrm{X} \end{array}}$$

Die Aussagenlogik ist ein Paradebeispiel eines *vollständigen* Kalküls, weil jede wahre Formel auch beweisbar ist, wie BERNAYS und POST um 1920 gezeigt haben. Dagegen sind ja die meisten anderen häufig benutzten Kalküle (z. B. die *Peano-Arithmetik*) nicht vollständig. Das bedeutet, dass gerade in den wichtigen Kalkülen der Mathematik Aussagen existieren, die zwar wahr sind, die jedoch nicht bewiesen werden können. Es besteht offenbar ein fundamentaler Unterschied zwischen *Wahrheit* und *Beweisbarkeit*. Beweise im Sinne der axiomatischen Methode erzeugen nicht alle gültigen Sätze. Das macht eindrücklich klar, dass allein das Spielen in einem Kalkül, also das Produzieren von immer neuen Sätzen aus Axiomen und unter Berücksichtigung von vorausbestimmten Schlussregeln nicht stark genug ist, den Bereich aller wahren Aussagen abzudecken. Es wird immer nötig sein, eine Metaebene einzunehmen, um dann mit Methoden zu arbeiten, die eben nicht im voraus festgelegt sind, die Fantasie und Kreativität nötig machen. Daher wird Mathematik immer eine Kunst sein und nie bloss ein mechanistisches Tun.

Zum Selbermachen:

Aufgabe 1:

a) Leiten Sie mindestens fünf weitere gültige Wörter her. Achten Sie darauf, jede der vier Regeln mindestens einmal zu benutzen.
b) Finden Sie für jedes der folgenden Wörter eine Herleitung, also eine Kette von Umformungen, die alle mit Hilfe der Regeln begründbar sind: MUIIU, MIIIIIIIIIIIIIIIU, MIUIU.

Aufgabe 2:
Beweisen Sie MIIIIIU.

Aufgabe 3:
Entscheiden Sie für jede der folgenden Zeichenketten, ob sie beweisbar ist oder nicht. Begründen Sie Ihre Entscheide ausführlich.

a) MIII...I mit 2048 Buchstaben I
b) U
c) MIUUU...U mit 1736 Buchstaben U
d) M

Aufgabe 4:
Hier betrachten wir ein neues Spiel, das sog. PG-Spiel. In diesem Spiel gibt es genau drei Zeichen, nämlich:

P G –

Es gibt diesmal aber unendlich viele Axiome, nämlich alle Ketten der Art

xP–Gx–

wobei x für irgendeine Kette von Bindestrichen steht. Es gibt genau eine Beweisregel, nämlich:

xPyGz → xPy–Gz–

wobei x, y und z für irgendwelche Ketten von Bindestrichen stehen.

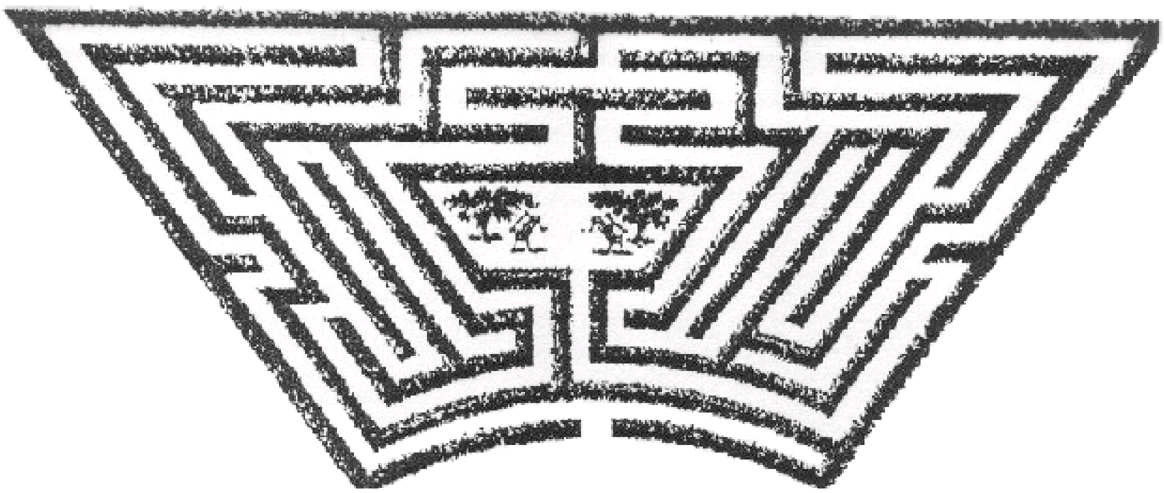
a) Entscheiden Sie, ob (und allenfalls wie) die Kette – – – p – – g – – – – – beweisbar ist oder nicht.
b) Finden Sie ein Entscheidungskriterium, mit dem von einer beliebigen Kette entschieden werden kann, ob sie beweisbar ist oder nicht.
c) Entwickeln Sie eine *Isomorphie* zwischen dem PG-Spiel und einer anderen, sehr vertrauten Struktur. Machen Sie klar, dass jedes Element der Struktur „PG-Spiel" in ein entsprechendes Element in der anderen Struktur abgebildet werden kann, so dass entsprechende Elemente eine ähnliche Rolle spielen. (Durch eine solche Abbildung findet eine *Interpretation* der Elemente der einen Struktur in der anderen Struktur statt.)
d) Nachdem Sie das PG-Spiel in einer anderen, vertrauten Struktur interpretiert haben, würden Sie nun denken, dass die Kette – – p – – p – – p – – g – – – – – – – – wahr ist?
e) Das Arbeiten in einem formalen System ist ein bedeutungsloses Manipulieren von Symbolen nach bestimmten Regeln und Festlegungen. Erst durch das Interpretieren in einem anderen Umfeld erlangt dieses Manipulieren eine gewissen Bedeutung. Kann man sagen, dass Bedeutungen innerhalb der Interpretation nun auch verändernd Einfluss haben auf das formale System?

Wichtiger Zusatz: Beweisbarkeit und Wahrheit ist nicht dasselbe! Der Unvollständigkeitssatz von Kurt Gödel (1913) besagt, dass (bei vorausgesetzter Widerspruchsfreiheit) die Peano-Axiome unvollständig sind; zum Beispiel ist der Gödelsatz ein konkreter Satz, der weder beweisbar noch widerlegbar ist. Dennoch muss entweder der Satz oder seine Negation wahr sein.

3. Labyrinthe – ein Algorithmus und ein Korrektheitsbeweis

Seit den an Tragik nicht zu überbietenden Ereignissen im Leben von Kretas König Minos sind Labyrinthe ein in ihrer Wirkung nie nachlassendes Faszinosum. Nicht genug damit, dass einer seiner Söhne ermordet wurde, König Minos' Frau verliebte sich auch noch in einen weissen Stier und gebar diesem ein Kind mit einem Stierkopf, den Minotaurus. In seiner Verzweiflung liess Minos vom Meisterarchitekten Daedalus ein riesiges Labyrinth bauen, in dessen innerster Kammer der Minotaurus fortan sein kümmerliches Dasein fristen musste, und Minos befahl den Bürgern von Athen, dem Ungeheuer alle 9 Jahre 7 junge Männer und 7 junge Frauen zum Frass zu opfern. Glücklicherweise wurde dieser makabre Blutzoll gestoppt, als Theseus unter Abwickeln eines Garnknäuels seiner Geliebten Ariadne ins Labyrinth vordrang, das Ungeheuer erstach und dank dem Garn wieder in die Freiheit fand.

Ob dieses sagenhafte Labyrinth einen Bezug zur Realität hat, ist nicht ganz klar. Immerhin hat Sir ARTHUR EVANS 1899, als er Knossos ausgrub, einen grossen Palast mit versteckten Korridoren freigelegt, dessen Wände teils mit Irrgärten und Fresken von Stierkämpfen verziert sind. Die *Minoische Kultur* ist damit entdeckt worden, und sie überraschte die Historiker mit nie geahnter Vielfalt und Reife.



Diese Abbildung aus [4] zeigt eines der berühmtesten Labyrinthe der Welt, das 1690 in Hamton Court erbaute Heckenlabyrinth, das sich hervorragend dazu eignet, um die oftmals erfolgreiche „*Rechte-Hand-Regel*" zu demonstrieren: Um einen Weg ins Zentrum zu finden, muss man lediglich beim Eingang mit der rechten Hand die Hecke berühren und dann beim Weitergehen darauf achten, dass diese Hand nie die Hecke verlässt. Ich selber habe gemischte Gefühle beim Anblick dieses Labyrinths, weil ich als kleiner Junge einmal ohne Garnknäuel ins Zentrum dieses Irrgartens vordrang, und dann, als ich verzweifelt den Rückweg suchte, geschah etwas, was in England oft geschieht: Es begann, sintflutartig zu regnen.

Es drängt sich die Frage auf, ob es ein Verfahren gibt, mit dem man *immer* ins Zentrum eines Labyrinthes vordringen kann, gesetzt der Fall, das Zentrum ist überhaupt erreichbar. Wir versetzen uns zu diesem Zweck in die Lage von Theseus: Wir stehen also am Eingang eines uns ganz unbekannten Labyrinths, das eine Ende des Fadens am Eingang befestigt, und Minotaurus befindet sich im Zentrum. Uns fehlt aber jegliche Übersicht über den Irrgarten, so dass wir nicht die mindeste Ahnung haben, wie wir zum Ungeheuer gelangen sollen. Wir würden uns daher besonders freuen über einen Algorithmus, der uns zwingend zu Minotaurus führt, obwohl die Freude durch die Aussicht auf einen erbitterten Kampf um Leben und Tod etwas getrübt wird...

Einen solchen Algorithmus gibt es, und wir folgen bei seiner Besprechung der Darstellung in [5]:

Ein Labyrinth-Algorithmus:

Voraussetzungen:
- Minotaurus (M) steckt irgendwo im Labyrinth.
- Theseus (T) steht am Eingang mit Ariadnes Garn, befestigt ein Garnende am Eingang und betritt das Labyrinth, indem er Garn abwickelt.
- Das Labyrinth ist ein ungerichteter Graph.
- Ariadne (A) wartet auf T am Eingang. (Dieser Punkt ist nicht zwingend, macht Theseus aber Mut.)

Ziel: Wir sollten T einen Algorithmus geben, mit dem er M zwingend findet.

Bezeichnungen:
- Ein Gang sei/heisse *grün*, genau dann wenn T ihn noch nicht benutzt hat.
- Er sei/heisse *gelb*, genau dann wenn T ihn schon einmal durchschritten hat (und somit der Faden in ihm liegt).
- Er sei/heisse *rot*, genau dann wenn T ihn zweimal durchschritten hat, beim zweiten Mal den Faden aufwickelnd.

ALGORITHMUS:

Entscheide an jeder Kreuzung, welche Bedingung zutrifft, und befolge dann die Aktion. Treffen mehrere Bedingungen zu, so wähle die oberste.

Bedingung	Aktion
1.) M erreicht	STOP
2.) LOOP (d.h. in der Kreuzung liegt schon der Faden; es gibt also mindestens 3 gelbe Korridore)	Faden aufwickeln, d.h. Korridor, aus dem T gekommen ist, zurückgehen.
3.) GRÜN (d.h. an der Kreuzung ist mindestens ein grüner Korridor vorhanden)	Wähle einen grünen Korridor und wickle Faden ab.
4.) A erreicht.	STOP
5.) „Fall 5“ (Keine der Bedingungen 1-4 trifft zu!)	Wickle den Faden auf durch Zurückgehen.

In Beispielen sieht man, dass der Algorithmus tatsächlich leistet, was er verspricht: Falls M überhaupt erreichbar ist, trifft T auch auf ihn. Es stellt sich aber sofort die Frage, ob der Algorithmus *immer* leistet, was er verspricht, in jedem möglichen Labyrinth. Diese Frage kann nur mit einem *Korrektheitsbeweis* beantwortet werden, und das Schöne ist, dass ein solcher Beweis sich hier wirklich aufdrängt, dass er nicht aufgesetzt wirkt, dass seine Notwendigkeit sofort verstanden wird. Wir behaupten also:

<u>T muss nach endlich vielen Schritten zu einer STOP-Anweisung gelangen. Ist dies bei M, so ist M offenbar erreichbar, und T findet den Rückweg durch Aufwickeln des Fadens. Ist dies bei A, so ist M prinzipiell unerreichbar.</u>

Beweis:

Wir beweisen

a) T muss nach endlich vielen Schritten zu einer STOP-Anweisung kommen.
b) Falls die STOP-Anweisung bei M erfolgt, bildet der Faden einen schleifenlosen Weg von A zu M, entlang dem T zurückfindet.
c) Falls die STOP-Anweisung bei A erfolgt, ist M prinzipiell unerreichbar.

Zu a)
Die Anzahl Korridore ist endlich und sei $k\left(\in \mathbb{N}\right)$. T geht durch jeden Korridor höchstens zweimal (danach ist er rot); also gelangt T nach spätestens $2k$ Schritten zu einer STOP-Anweisung.

Zu b)
Da der Anfang des Fadens bei A ist, bildet der Faden, falls die STOP-Anweisung bei M kommt, einen Weg von A zu M. Dieser ist schleifenlos, weil T immer dann, wenn die LOOP-Anweisung auftrat, den Faden aufgewickelt hatte.

Zu c)
Es kommt also zu einer STOP-Anweisung bei A. Dann gilt:

c.1) Alle Korridore sind rot oder grün.
c.2) Alle am Eingang startenden Korridore sind rot.

Zu c.1)
Gäbe es irgendwo im Labyrinth einen gelben Korridor, so läge der Faden noch im Labyrinth, und T ist zum Eingang nicht durch Aufwickeln sondern durch Abwickeln gelangt. Dann müsste am Eingang aber die Bedingung LOOP erfüllt sein, welche höhere Priorität hat als die Bedingung ARIADNE. Folglich musste T aufwickeln, und es konnte nicht zu einer STOP-Anweisung kommen.

Zu c.2)
Wegen c.1) kann es am Eingang nur grüne oder rote Korridore geben. Wäre einer grün, so müsste T diesen wählen, weil GRÜN höhere Priorität hat als ARIADNE.

Nun, da wir c.1) und c.2) nachgewiesen haben, können wir c) zeigen:

Es kommt also zu einer STOP-Anweisung bei A. Angenommen, T wäre doch erreichbar, etwa via die Korridore

$$\mathrm{AA_1, A_1A_2, A_2A_3, ..., A_nM}$$

$\mathrm{AA_1}$ ist rot wegen c.2.
$\mathrm{A_nM}$ ist grün, weil sonst M erreicht worden wäre.
Sei $\mathrm{A_iA_{i+1}}$ der erste grüne Korridor von links.

$$\underbrace{AA_1,\ A_1A_2,\ \ldots, A_{i-1}A_i}_{\text{alle rot}}\ \underbrace{A_iA_{i+1}}_{\substack{\text{erster grüner}\\ \text{Korridor}}},\ \ldots,\ \underbrace{A_nM}_{\text{grün}}$$

Kreuzung A_i hat also mindestens einen roten und einen grünen Korridor. Folglich muss T diese Kreuzung bei seinem letzten Besuch via einen Korridor verlassen haben, der jetzt rot ist. Folglich hatte er Bedingung LOOP oder FALL5 registriert. FALL5 konnte es nicht gewesen sein, weil GRÜN höhere Priorität gehabt hätte. Also muss es LOOP gewesen sein, d.h. es hatte mindestens drei gelbe Korridore gegeben. Dann müsste es jetzt noch immer mindestens zwei gelbe Korridore geben im Widerspruch zu c.1). Folglich ist T prinzipiell unerreichbar, wenn es bei A zu einer STOP-Anweisung kommt.

$\square$

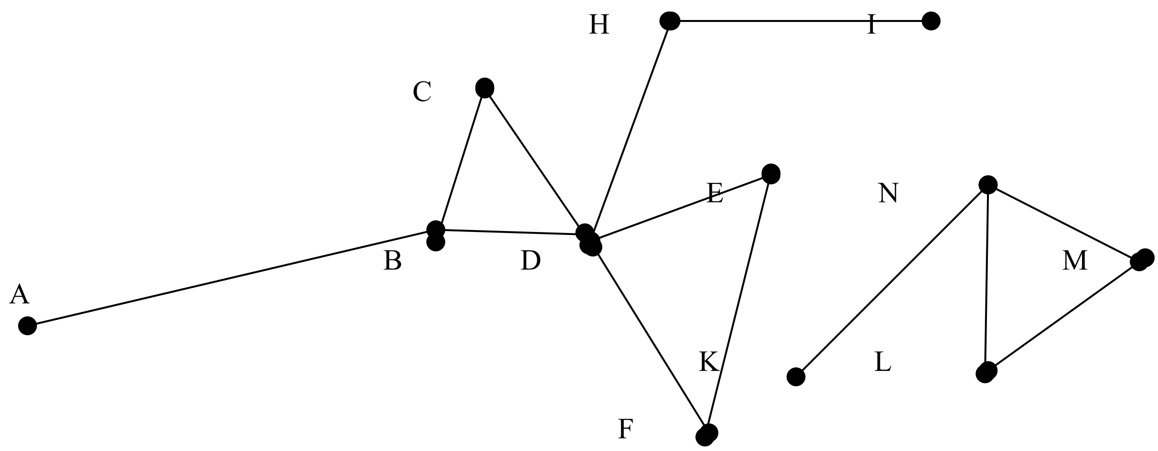
Die moderne Mathematik ist voll von Algorithmen, programmierbaren Verfahren, die Schritt für Schritt gewisse Aufgabe erledigen. Sie sortieren riesige Datensätze, steuern Kreuzungen oder Rangierbewegungen, sie verschlüsseln Daten, sie bestimmen die Position von Fahrzeugen, Flugzeugen und Schiffen, sie helfen bei medizinischen Diagnosen und steuern die Schleifsteine bei der Herstellung von Zahnfüllungen. In allen alltäglichen Einatzgebieten der Algorithmen ist die Anforderung mehr als plausibel, dass sie *korrekt* sein müssen, dass sie genau das leisten, was von ihnen erwartet wird. Daher sind Korrektheitsbeweise von Algorithmen gerade heute von enormer Bedeutung.

Zum Selbermachen

Aufgabe 1:
Finden Sie einen Weg ins Zentrum des abgebildeten Hampton-Court-Labyrinths (p. 10).

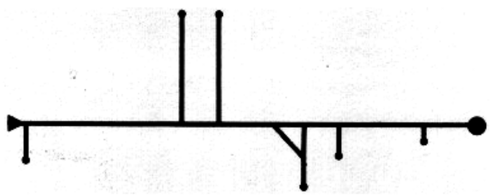
Aufgabe 2:
Konstruieren Sie selber ein Labyrinth, bei dem die *Rechte-Hand-Regel* versagt.

Aufgabe 3:
Spielen Sie den Labyrinth-Algorithmus im folgenden Labyrinth durch. Nehmen Sie dazu an, dass Minotaurus im Punkt F auf Sie lauert. Wählen Sie im ersten Spiel den Eingang A, danach den Eingang K. Legen Sie überdies fest, wie bei Bedingung GRÜN ein grüner Korridor gewählt wird.

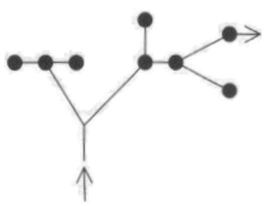


Geben Sie zudem an, nach wie vielen Schritten der Algorithmus spätestens terminiert, ganz unabhängig davon, wo der Eingang ist und wo sich das Ungeheuer befindet.

Aufgabe 4:
Die folgende Abbildung hat mit dem Hampton-Court-Labyrinth zu tun. Erklären Sie genau, wie es entstanden und was sein Vorteil ist.



Aufgabe 5:
Graphen sind nützliche Hilfsmittel, um Labyrinthe (und viele andere Sachen) darzustellen. Zeichnen Sie mindestens zwei auf den ersten Blick verschieden aussehende Labyrinthe auf, deren Strukturen aber identisch sind und dem abgebildeten Baum entsprechen.



Aufgabe 6:
Wir führen ein neues Spiel ein:
Wir erlauben einzig Buchstaben aus dem *Alphabet* $A := \{a,b,c,d,e\}$. Jede Kette solcher Buchstaben (egal, ob einzelne Buchstaben mehrfach vorkommen oder nicht) wollen wir ein *Wort* nennen.

Beispielsweise sind also *abc, ccab, eeeeeddddcccbba* Wörter. Das Spiel besteht nun darin, angefangen mit einem gegebenen Wort gewisse (aber nur erlaubte) Veränderungen so vorzunehmen, dass ein anderes gegebenes Wort erreicht wird. Die erlaubten Veränderungen sind:

$ac \leftrightarrow ca$	$abac \leftrightarrow abacc$
$ad \leftrightarrow da$	$eca \leftrightarrow ae$
$bc \leftrightarrow cb$	$edb \leftrightarrow be$
$bd \leftrightarrow db$	

Diese Veränderungen wollen wir *Substitutionen* nennen. Die Idee dabei ist, dass man das aktuell vorliegende Wort stets dahingehend untersucht, ob in ihm eines der in obiger Tabelle angegebenen Bruchstücke vorkommt. Falls ja, darf man es durch das jeweils andere ersetzen. Sind beispielsweise die beiden Wörter *V=abcde* und *W=cadedb* gegeben, so besteht das Spiel nun darin, von *V* nach *W* zu gelangen, dabei aber in jedem Schritt nur eine der erlaubten Substitutionen zu benutzen. Das gelingt tatsächlich und zwar etwa so:

$$V=abcde \rightarrow acbde \rightarrow cabde \rightarrow cadbe \rightarrow cadedb=W$$

Zwei unmittelbar aufeinander folgende Wörter in einer solchen Kette (bei denen also das eine aus dem anderen durch eine einzige Substitution hervorgeht) wollen wir *benachbart* nennen. Ist ein Wort *W* durch unter Umständen mehrere Substitutionen aus einem anderen Wort V zu gewinnen, so nennen wir *W* aus *V ableitbar* oder *beweisbar*, und wir schreiben $V \rightarrow \rightarrow W$.

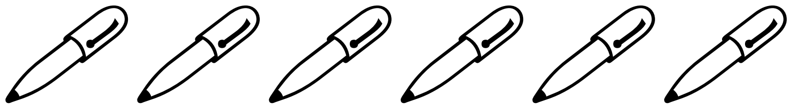
a) Entscheiden Sie, ob (und gegebenenfalls wie) *W=edbabacc* aus *V=beacba* ableitbar ist.
b) Beweisen Sie, dass es prinzipiell unmöglich ist, das Wort *W=beacad* aus dem Wort *V=edbdac* abzuleiten.
c) Finden Sie einen Weg, dieses sog. *Wort-Problem* in Beziehung zu bringen mit dem in diesem Kapitel untersuchten Labyrinth-Problem. Genauer: Das Wort-Problem soll auf eine Weise umformuliert werden, dass daraus ein Labyrinth-Problem entsteht, bei dem die Suche nach dem Minotaurus genau der Suche nach einem Beweis für das Wort *W* entspricht.
d) Welcher entscheidende Unterschied zwischen dem in b) eingeführten Labyrinth-Problem und dem in diesem Kapitel untersuchten Labyrinth-Problem besteht? Und welche Konsequenzen hat dieser Unterschied?

Zusatz:
Als *Wortproblem von THUE* (1914) wird ganz allgemein das Problem verstanden, algorithmisch zu entscheiden, ob zu zwei gegebenen Wörter *V* und *W* über einem Alphabet A (und bei einer endlichen Menge von erlaubten Substitutionen) eine Ableitung des einen Wortes in das andere existiert oder nicht. Viele mathematische Probleme können letztlich als Wortprobleme formuliert werden. Darum ist die folgende Aussage von grosser Bedeutung: In den Jahren 1946 und 1947 haben der sowjetische Mathematiker A. A. MARKOV und der amerikanische Mathematiker E. POST unabhängig voneinander beweisen, dass das Wortproblem von THUE unlösbar ist.

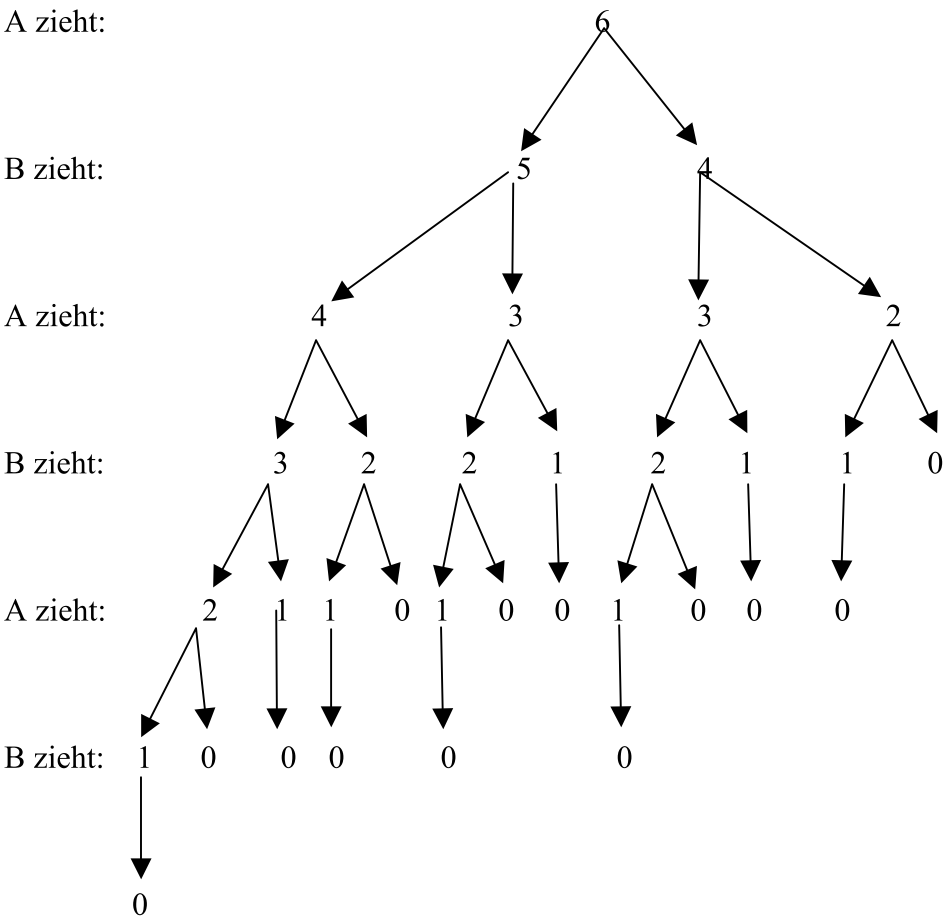
Der Beweis ist recht einfach und überaus elegant. Nachdem TURING 1936 die Unlösbarkeit des *Halteproblems* bewiesen hatte, konnte man die Unlösbarkeit eines weiteren Problems, des sog. *Translationsproblems* – Es soll algorithmisch entschieden werden, ob eine bestimmte Turingmaschine bei einem bestimmten Input jemals eine bestimmte Bandinschrift erreichen wird oder nicht – , dadurch beweisen, dass man es auf das Halteproblem reduzierte. Ist einmal das Translationsproblem als unlösbar bewiesen, kann man das Wortproblem auf das Translationsproblem reduzieren. Und damit ist auch das Wortproblem als unlösbar nachgewiesen. (Natürlich könnte gewisse konkrete Wortprobleme durchaus algorithmisch entscheidbar sein, wenn nämlich speziell glücklich gewählte Substitutionen vorliegen. In voller Allgemeinheit ist das Wortproblem aber nicht lösbar.)

4. Zwei-Personen-Spiele, Spielbäume und Spielstrategien

Betrachten wir sofort ein Beispiel: Beim Spiel „Six pens“ liegen 6 Schreibstifte auf einem Tisch, und zwei Spieler A und B entfernen abwechselnd einen oder zwei Stifte. Verlierer ist, wer den letzten Stift nehmen muss. Solche und ähnliche Spiele eignen sich hervorragend, um *Spielbäume* einzuführen und all die Details, die damit zusammenhängen.



Ein *Spielbaum* ist eine schematische Darstellung aller möglichen Spielabläufe. Zuoberst an der Wurzel – In der Mathematik können Wurzeln von Bäumen auch ganz oben sein! – steht die Ausgangssituation. Von dort gehen zwei Äste aus, nämlich die beiden möglichen ersten Züge von Spieler A: Er/Sie entfernt einen oder zwei Stifte, wonach also noch fünf oder vier Stifte übrig sind für den ersten Zug von Spieler B, usw. Jedes äusserste (unterste) Blatt des Baumes stellt die Situation dar, dass alle Stifte entfernt worden sind.

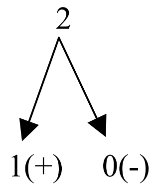


Ein Spielbaum ist ein Beispiel eines *gerichteten Graphen*. Jede Zahl ist ein sog. *Knoten*, und jeder Pfeil ist eine *Kante*. *Gerichtet* ist der Graph, weil jede Kante nur in einer Richtung (hier: nach unten) durchlaufen werden darf. Eine allfällige Gewinnstrategie kann nun leicht sichtbar gemacht werden durch *Bewertung* der Knoten. Wir heften dazu Labels an die Knoten: „+“ für „A gewinnt“ und „–“ für „A verliert“. Dazu muss man sich lediglich die folgende Regel bewusst machen: Bei jedem Blatt (also den Knoten 0) ist die Bewertung besonders einfach. Ist die 0 durch einen Zug von A erreicht worden, hat A verloren, und folglich muss die 0 mit „–“ bewertet werden. Ist die 0 durch einen Zug von B erreicht worden, hat A gewonnen, und folglich muss die 0 mit einem „+“ bewertet werden. Hat man die Bewertung der Blätter vorgenommen, kann man nun schrittweise nach oben gehen und alle restlichen Knoten bewerten. Dabei gilt: Will man einen Knoten bewerten, bei dem A zieht, so ist die Bewertung die *Disjunktion der Bewertungen derjenigen Knoten, auf die der aktuelle Knoten zeigt*. Will man aber eine Knoten bewerten, bei dem B zieht, so ist die Bewertung die *Konjunktion der Bewertungen derjenigen Knoten, auf die der aktuelle Knoten zeigt*.

Wir illustrieren dies durch zwei Beispiele: Ein Ausschnitt des Spielbaumes sieht so aus:

A zieht:

B zieht:

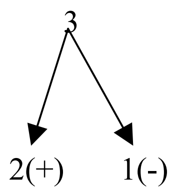


Der Knoten 1 wurde schon mit „+“ bewertet, weil B nun den letzten Stift entfernen muss, und der Knoten 0 wurde schon mit „-“ bewertet, weil A (dummerweise) die letzten Stifte entfernt und damit verloren hat. Wie muss nun der Knoten 2 bewertet werden? Da A ziehen kann, wählt er natürlich diejenige Version, in der er gewinnt. Wenn der aktuelle Knoten also auf eine „+“Bewertung zeigt, so wählt A diesen Weg. Daher ist der aktuelle Knoten genau dann ein „+“Knoten, wenn er auf mindestens eine „+“Bewertung zeigt. Daher ist die Bewertung des aktuellen Knotens die Disjunktion der Bewertungen, auf die er zeigt.

Betrachten wir noch einen Knoten, in dem B ziehen muss:

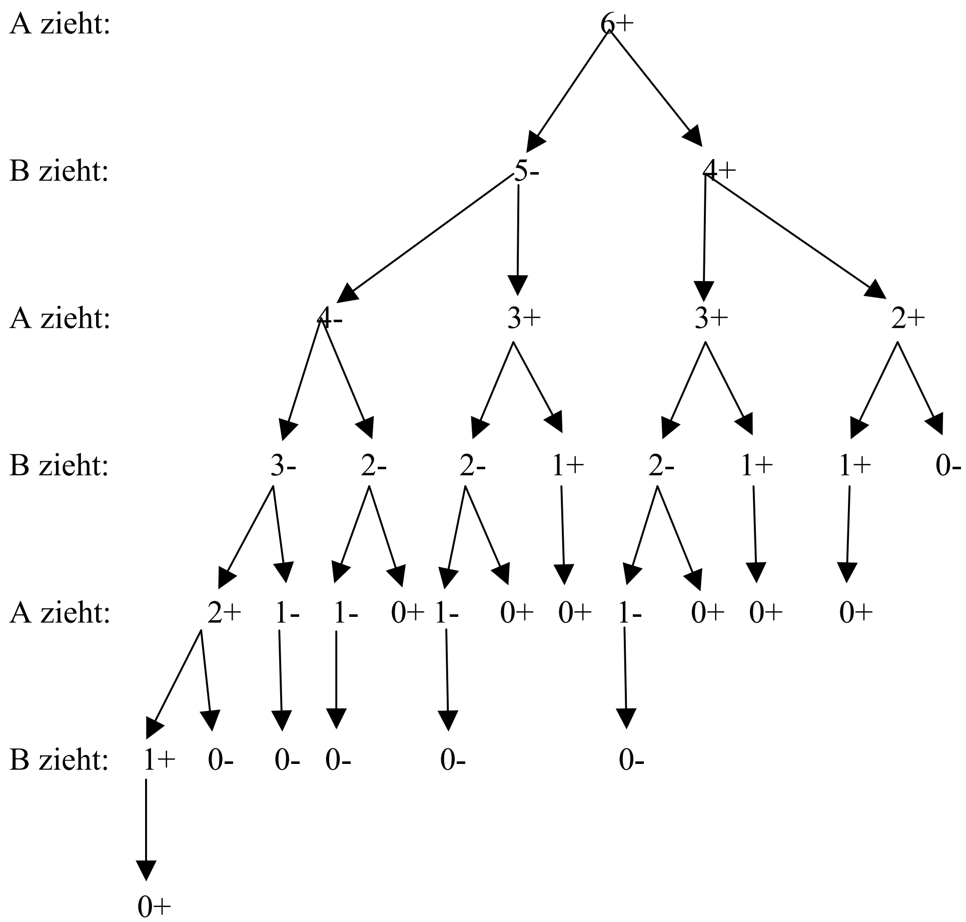
B zieht:

A zieht:



Der Knoten 2 wurde schon mit „+“ bewertet; es handelt sich nämlich um den im ersten Beispiel untersuchten und bewerteten Knoten. Der Knoten 1 muss mit „-“ bewertet werden, weil A den letzten Stift ziehen muss. Wie muss nun der aktuelle Knoten 3 bewertet werden? Da B ziehen muss, wählt er natürlich, falls das möglich ist, einen Pfeil, der auf „-“ zeigt, weil damit A verliert, was aus der Sicht von B günstig ist. B hat also Glück, falls mindestens ein Pfeil auf „-“ zeigt, was hier der Fall ist. Daher ist die Bewertung des aktuellen Knotens „-“, und sie wäre nur dann „+“, wenn beide Pfeile auf „+“ zeigen würden. Das bedeutet, dass die Bewertung des aktuellen Knotens die Konjunktion der Bewertungen ist, auf die er zeigt.

Bewertet man nun alle Knoten des Spielbaums von unten nach oben, so ergibt sich der folgende bewertete Baum. Er beweist, dass A eine *Gewinnstrategie* hat, weil die Wurzel mit „+“ bewertet wird und A folglich die Möglichkeit hat, das Spiel so zu steuern, dass B den letzten Stift ziehen muss.



Gibt es andere Spiele, die sich so behandeln lassen? Kann man immer eine Gewinnstrategie finden? Was ist mit den bekannten Zwei-Personen-Spielen? Sofort entstehen viele interessante Fragen. Um ein Gefühl für die Antworten zu entwickeln, lohnt es sich, einige weitere Zwei-Personen-Spiele auf ähnliche Art zu analysieren:

Solche Beispiele zeigen eindrücklich, dass die Spielbäume sehr schnell wachsen. Beim Schachspiel beispielsweise stehen dem Spieler oftmals 20 oder mehr verschiedene Züge zur Auswahl; der Baum hätte also nach 3 Zügen etwa $\approx 20^3 = 8000$ und nach 10 Zügen bereits $\approx 20^{10} > 10^{13}$ Verzweigungen, eine erschreckend hohe Zahl, die verständlich macht, warum niemand Schach spielt, indem er auf einem Blatt den vollständigen Spielbaum entwirft.

Andererseits eignen sich Spielbaumanalysen für überschaubare Spiele sehr gut, und es ist erstaunlich, wie viele Spiele eine Spielbaumanalyse zulassen und in wie vielen Spielen folglich eine Gewinnstrategie für einen der Spieler ausgearbeitet werden kann. Es gilt nämlich der folgende Satz:

SATZ:
Jedes Zwei-Personen-Spiel, das die folgenden Eigenschaften 1 – 5 erfüllt, besitzt eine Gewinnstrategie für den einen oder anderen Spieler.

1) **Die beiden Spieler A, B machen immer abwechselnd einen Zug. A beginnt.**
2) **Es gibt genau zwei mögliche Ausgänge des Spiels: A gewinnt oder B gewinnt.**
3) **Jeder Zug entsteht als eine Wahl des Spielers aus einer Menge möglicher Züge.**
4) **Zu jedem Zeitpunkt haben beide Spieler volle Kenntnis über die bisher gespielten Züge und die weiteren möglichen Spielzüge.**
5) **Die Anzahl möglicher Züge ist von oben beschränkt.**

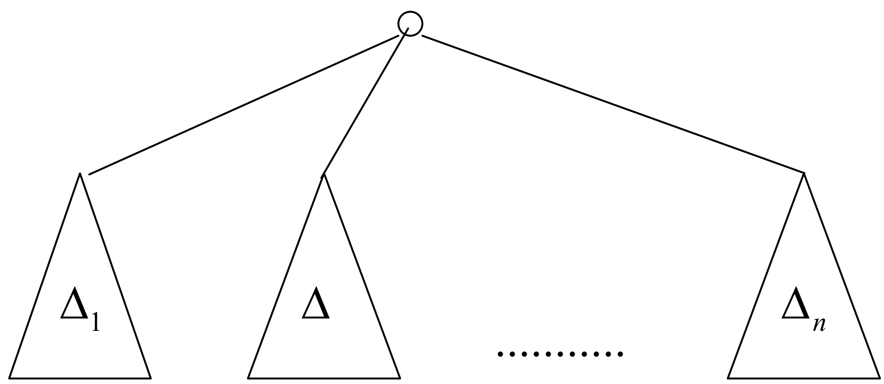
Das sind nur schwache Forderungen, die von vielen Spielen erfüllt werden, die kein Element des Zufalls (wie Würfeln, Kartenziehen usw.) enthalten. Und immer bei solchen Spielen kann also – wenigstens theoretisch – eine Gewinnstrategie für A oder B gefunden werden; es ist höchstens eine Frage des Aufwandes...

Ein positiver Aspekt dieses Satzes ist die Tatsache, dass er ein Beispiel eines Beweises mit *vollständiger Induktion* liefert, welches *nicht* das klassische Muster solcher Beweise zementiert. Ich erlebe oft, dass Schülerinnen und Schüler bei solchen Beweisen immer nur an mehr oder weniger künstlich ins Spiel gebrachte Formeln über natürliche Zahlen denken, obwohl doch vollständige Induktion so viel mehr leistet. Daher begrüsse ich einen Satz wie diesen, und wir werden belohnt durch einen besonders einfachen Beweis vom Typ vollständige Induktion:

Beweis:

Man führt eine vollständige Induktion über die Länge einer längsten Partie (also über die grösste Baumtiefe). Sei L diese Zahl.

- Der Fall $L=1$ ist trivial. Die Partie besteht nur aus einem Zug von Spieler A. Entweder es gibt einen Zug, der ihm den Sieg bringt, oder es gibt keinen solchen Zug. Im ersten Fall gibt es eine Gewinnstrategie für A, im anderen für B.
- Im Vererbungsschritt nehmen wir an, der Satz sei nachgewiesen für alle Zahlen $\leq L$, und wir betrachten einen Spielbaum mit maximaler Tiefe $L+1$:



Jeder der Unterbäume Δ_i besitzt nach Induktionsvoraussetzung eine Gewinnstrategie. Spieler A, der ja beginnt, muss also bloss einen der Unterbäume ansteuern, für den es eine Gewinnstrategie für ihn gibt. Gibt es das in keinem Unterbaum, so gibt es insgesamt eine Gewinnstrategie für B.

□

Zum Selbermachen:

Aufgabe 1:
Betrachten Sie das folgende NIM-Spiel: Auf einem Haufen liegen 8 Streichhölzchen. Ein Zug besteht darin, entweder 1, 3 oder 4 Hölzchen zu entfernen. A beginnt, und verloren hat, wer nicht mehr ziehen kann.

a) Zeichnen Sie den kompletten Spielbaum auf. Beschriften Sie dabei die Knoten mit der Anzahl der auf dem Stapel verbleibenden Hölzchen.
b) Markieren Sie im Baum alle Knoten mit „+“ für *Gewinnposition für A* oder mit „-“ für *Verlustposition für A*.
c) Für welchen Spieler gibt es welche Gewinnstrategie?

Aufgabe 2:
„Elf Streichhölzer“: Zwei Spieler A und B sitzen vor 11 Streichhölzern und ziehen abwechselnd, beginnend mit A. Ein Zug besteht aus dem Entfernen von 1 oder 2 oder 3 Hölzchen. Verlierer ist, wer gezwungen ist, das letzte Hölzchen zu entfernen.

a) Spielen Sie das Spiel.
b) Skizzieren Sie den Spielbaum, und bewerten Sie ihn.
c) Für welchen Spieler gibt es welche Gewinnstrategie?

Aufgabe 3:
„Schokoladenspiel“: Zwei Spieler A und B sitzen vor einer Tafel Schokolade mit m Zeilen und n Spalten und ziehen abwechselnd, beginnend bei A ($m, n \in \mathbb{N}$). Das Täfelchen oben links ist irgendwie markiert. Ein Zug besteht aus dem Wegbrechen (und Essen) eines Teils der Schokolade entlang irgendeiner Kante (einige Zeilen oder aber einige Spalten). Dabei darf das markierte Täfelchen oben links nie entfernt werden. Verlierer ist, wer am Ende nur noch das markierte Täfelchen oben links vor sich sieht und folglich nicht mehr ziehen kann. Spielen Sie das Spiel mit den folgenden skizzier-ten Schokoladen:

x							

x				

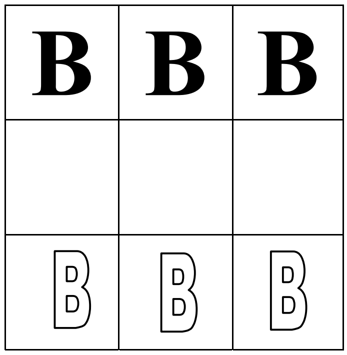
x					

x					

x			

a) Analysieren Sie das Spiel im Hinblick auf Gewinnstrategien
b) Entwerfen Sie für eine der Schokoladen einen bewerteten Spielbaum.
c) Kaufen Sie eine reale Schokolade, und essen Sie sie.

Aufgabe 4:
„Drei-Bauern-Schach“: Zwei Spieler A und B sitzen sich vor einem 3x3-Schachbrett gegenüber, auf dem (in der einen Grundlinie) 3 weisse Bauern und (auf der anderen Grundlinie) 3 schwarze Bauern stehen. Sie ziehen abwechselnd, beginnend bei A (weiss). Ein Zug besteht darin, dass ein Spieler entweder einen seiner Bauern um ein Feld vorrückt oder aber einen gegnerischen Bauern schräg schlägt. Sieger ist, wer zuerst mit einem eigenen Bauern die gegnerische Seite erreicht hat oder aber den Gegner bewegungsunfähig gemacht hat.



a) Spielen Sie das Spiel.
b) Analysieren Sie es im Hinblick auf Gewinnstrategien.

Aufgabe 5:
Wir verallgemeinern das Spiel aus Aufgabe 2: Zwei Spieler A und B sitzen vor n Streichhölzchen ($n \in \mathbb{N}$) und ziehen abwechselnd, beginnend mit A. Ein Zug besteht aus dem Entfernen von x Hölzchen, wobei $1 \le x \le a$. Dabei ist a eine Konstante, nämlich die maximale Anzahl Hölzchen, die in einem Schritt entfernt werden dürfen. Verlierer ist, wer nicht mehr ziehen kann. Analysieren Sie das Spiel im Hinblick auf Gewinnstrategien.

Aufgabe 6:
Bei diesem Zweipersonenspiel muss zunächst eine Teilmenge $S \subset [0,1]$ gewählt werden. A und B spielen abwechseln, A beginnt.

- A wählt eine Zahl $a_1 \in]0,1[$.
- Dann wählt B eine Zahl b_1 mit $a_1 < b_1 < 1$.
- Dann wählt A eine Zahl a_2 mit $a_1 < a_2 < b_1$.
- Dann wählt B eine Zahl b_2 mit $a_2 < b_2 < b_1$
- Usw.

Für alle $n \ge 2$ wählt also A eine Zahl a_n mit $a_{n-1} < a_n < b_{n-1}$ und B dann eine Zahl b_n mit $a_n < b_n < b_{n-1}$. Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist streng monoton wachsend und von oben beschränkt, folglich konvergent. Sei $\alpha := \lim_{n \to \infty}(a_n)$. Nun lautet die Spielregel, dass A gewinnt, falls $\alpha \in S$ und dass B gewinnt, falls $\alpha \notin S$ ist.

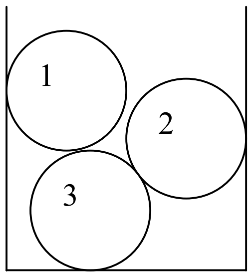
a) Beweisen Sie den Satz $\boxed{S \text{ abzählbar} \quad \Rightarrow \quad \text{B hat eine Gewinnstrategie}}$.
b) Benutzen Sie diesen Satz um zu zeigen, dass $\mathbb{R}$ überabzählbar ist.

5. an der Oberfläche der Spieltheorie kratzen

In diesem Kapitel folgen wir eng den Ausführungen in [1].

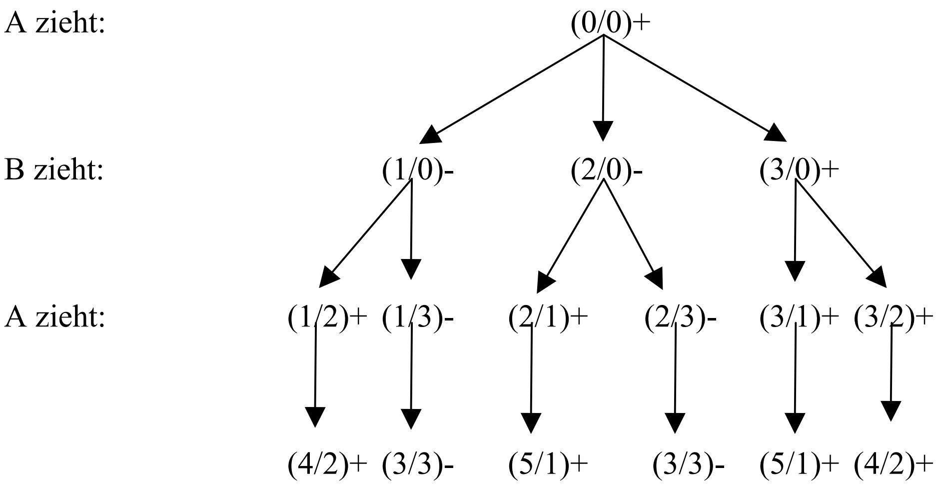
Die Entstehung der Spieltheorie verdanken wir fast ausschliesslich den Ideen des Mathematikers JOHN VON NEUMANN und des Ökonomen OSCAR MORGENSTERN. Ihr Buch „Theory of Games and Economic Behaviour" aus dem Jahr 1944 hatte enormen Einfluss auf Wirtschaftswissenschaften, Politikwissenschaften und Psychologie. Es gab sogar waghalsige Vergleiche, wonach die Bedeutung der Spieltheorie für die Sozialwissenschaften ebenso gross sein würde wie die Bedeutung der Differentialrechnung für die Physik, ein Vergleich, der sich später als falsch oder im mindesten als stark überstrapaziert herausstellen sollte.

Die folgenden Bemerkungen beschränken sich weiterhin auf Zwei-Personen-Spiele, die ohne Einwirkung des Zufalls ablaufen, wie das ja schon im vorangehenden Kapitel der Fall war. Spiele wie etwa Backgammon, die ein Element des Zufalls enthalten, sind also ausgeblendet. Wiederum soll ein Beispiel am Anfang stehen:



- Spieler A und B ziehen abwechselnd genau eine Kugel; A beginnt.
- Payoff = Summe der Zahlen
- Sieger ist, wer mehr Punkte hat.

Das Spiel ist natürlich alles andere als spannend; niemand würde es zum reinen Vergnügen oder zur Zerstreuung spielen. Aber es erfüllt die Bedingungen 1 – 5 aus dem Satz in Kapitel 4 und kann daher mit einem Spielbaum samt Knotenbewertung analysiert werden:



Die 2-Tupel stellen die erreichten Punktzahlen der Spieler A und B dar; (2/1) bedeutet also beispielsweise, dass A (bis zu diesem Zeitpunkt) 2 Punkte erzielt, während B erst 1 Punkt gesammelt hat. Neu ist nun aber, dass wir im voraus alle möglichen *Strategien* auflisten, also alle möglichen Spezifikationen, was jeder Spieler bei jeder anfallenden Entscheidung tun kann. Dabei ist zu beachten, dass Strategien ganz *wertfrei* sind, ihre Auflistung erfolgt also unabhängig davon, ob sie klug oder dumm sind. Im Beispiel sieht das so aus:

- 3 Strategien für A: $\{A_1, A_2, A_3\}$
  wobei A_i bedeutet: A wählt zu Beginn Kugel i.
- 8 Strategien für B: $\{B_1, B_2, ..., B_8\}$ wobei

$$\begin{aligned}
B_1&: \quad A_1 \to B_2 \ ; \ A_2 \to B_1 \ ; \ A_3 \to B_1 \\
B_2&: \quad A_1 \to B_2 \ ; \ A_2 \to B_1 \ ; \ A_3 \to B_2 \\
B_3&: \quad A_1 \to B_2 \ ; \ A_2 \to B_3 \ ; \ A_3 \to B_1 \\
B_4&: \quad A_1 \to B_2 \ ; \ A_2 \to B_3 \ ; \ A_3 \to B_2 \\
B_5&: \quad A_1 \to B_3 \ ; \ A_2 \to B_1 \ ; \ A_3 \to B_1 \\
B_6&: \quad A_1 \to B_3 \ ; \ A_2 \to B_1 \ ; \ A_3 \to B_2 \\
B_7&: \quad A_1 \to B_3 \ ; \ A_2 \to B_3 \ ; \ A_3 \to B_1 \\
B_8&: \quad A_1 \to B_3 \ ; \ A_2 \to B_3 \ ; \ A_3 \to B_2
\end{aligned}$$

Das muss sofort erläutert werden: Für A ist das ganze Spiel entschieden, sobald er/sie die Wahl der ersten Kugel getroffen hat; daher besitzt A nur die 3 erwähnten Strategien. B dagegen kann sich im voraus die folgenden Fragen stellen: Wie werde ich reagieren, falls A die Kugel 1 wählt, wie, falls A Kugel 2 wählt, und wie, falls A mit Kugel 3 beginnt? In jedem dieser drei Fälle hat B zwei mögliche Reaktionen: Falls A Kugel 1 wählt, kann B mit Kugel 2 oder Kugel 3 antworten. Falls A mit Kugel 2 beginnt, kann B mit Kugel 1 oder Kugel 3 antworten, usw. Daher hat B $2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$ mögliche Strategien, nämlich die oben aufgelisteten.

Hat man sich einmal klar gemacht, welche Strategien möglich sind, kann man sich der *payoff-Matrix* zuwenden, die allen möglichen Strategien die payoffs zuordnet:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
A1	4 / 2	4 / 2	4 / 2	4 / 2	3 / 3	3 / 3	3 / 3	3 / 3
A2	5 / 1	5 / 1	3 / 3	3 / 3	5 / 1	5 / 1	3 / 3	3 / 3
A3	5 / 1	4 / 2	5 / 1	4 / 2	5 / 1	4 / 2	5 / 1	4 / 2

Hat man sich anhand einiger Beispiele einmal klar gemacht, was Strategien und was eine payoff-Matrix ist, kann man sich im Folgenden der Untersuchung solcher Matrizen zuwenden, ohne die Vorgeschichte zu erwähnen, also ohne die konkreten Spiele zu thematisieren, die zu den jeweiligen Matrizen geführt haben. Die Matrix *ist* das Spiel, weil sie alle nötigen Informationen zur Beurteilung des Spiels beinhaltet.

Viele Zwei-Personen-Spiele ohne Zufallseinfluss sind *Nullsummenspiele*. Das sind Spiele, bei denen die payoffs von A und B sich immer auf 0 ergänzen. Ein Beispiel einer payoff-Matrix eines Nullsummenspiels sieht etwa so aus:

	B1	B2	B3
A1	-4 4	-2 2	5 -5
A2	2 -2	-4 4	-3 3
A3	3 -3	-6 6	-2 2
A4	-3 3	8 -8	6 -6

Die Payoffs von A und B ergeben summiert immer 0. Wenn das so ist, gibt man die payoff-Matrix auch in einfacherer Form an, nämlich so:

	B1	B2	B3
A1	4	2	-5
A2	-2	4	3
A3	-3	6	2
A4	3	-8	-6

also nur aus der Sicht von A. Die payoffs von B muss man sich als negative Werte dieser Zahlen dazudenken.

Hat man auf diese Weise die totale Übersicht über die möglichen Spielstrategien gewonnen, kann man sich der Bewertung zu wenden, also der Auslese guter oder optimaler Strategien. Dazu gibt es verschiedene Algorithmen, und zwei davon möchte ich an dieser Stelle beispielhaft erwähnen:

Reduktion der payoff-Matrix durch Elimination dominierter Zeilen/Spalten:

<u>Definition</u>:
Seien S_i, S_j zwei beliebige Strategien von A bzw. von B. Wir sagen:

$$S_i \text{ dominiert } S_j :\Leftrightarrow \begin{cases} \text{jeder payoff von } S_i \text{ ist } \geq \text{ dem entsprechenden payoff von } S_j \\ \wedge \\ \text{mindestens ein payoff von } S_i \text{ ist} > \text{als der entsprechende payoff von } S_j. \end{cases}$$

Der Algorithmus besteht dann einfach darin, schrittweise dominierte Zeilen oder Spalten der payoff-Matrix zu eliminieren, bis die optimale Spielstrategie erreicht oder keine weitere Reduktion mehr möglich ist. Beispiel:

$$\begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \\ 3 & -8 & -6 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{A1 dom. A4}]{} \begin{bmatrix} 4 & 2 & -5 \\ -2 & 4 & 3 \\ -3 & 6 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{B3 dom. B2}]{} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[\text{A2 dom. A3}]{} \begin{bmatrix} 4 & -5 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

Da es nun keine dominierte Zeile oder Spalte mehr gibt, bricht das Verfahren ab und offeriert jedem Spieler zwei „gute“ Spielstrategien, für A nämlich die Strategien A1 und A2 und für B die Strategien B1 und B3.

Reduktion der payoff-Matrix durch Maximin-Algorithmus

Dies ist ein Algorithmus, der vor allem dann sinnvoll ist, wenn beide Spieler extrem defensiv spielen. Ein Beispiel:

$$\begin{bmatrix} -5 & 11 & -7 \\ -2 & 8 & -1 \\ -3 & -4 & 14 \end{bmatrix}$$

- A notiert die schlechtesten payoffs (die Minima seiner Strategien): -7, -2, -4 und wählt das kleinste Übel (das Maximum der Minima): $\boxed{-2}$
- B notiert die schlechtesten payoffs (die Minima seiner Strategien): 2, -11,-14 und wählt das kleinste Übel (das Maximum der Minima): $\boxed{2}$

Jeder Spieler ist also darauf aus, das kleinste Übel, das Maximum der Minima, das sog. *Maximin*, zu wählen. In diesem Beispiel ist das Maximin von A gleich dem Negativen des Maximins von B. Ein solcher Eintrag der Matrix heisst *Sattelpunkt*; er besitzt eine gewisse Stabilität, weil immer dann, wenn ein Spieler vom Sattelpunkt abweicht und der andere nicht, der Abweichler leidet.

Nun möchte ich mich noch kurz denjenigen Zwei-Personen-Spielen zuwenden, welche *nicht* Nullsummenspiele sind. Ein Beispiel:

0 / 0	5 / -5
-5 / 5	-20 / -20

Es gibt zahlreiche Situationen im alltäglichen Leben, welche zwei Menschen dazu bringen könnten, dieses Spiel zu spielen. Stellen wir uns etwa zwei Autofahrer vor, die auf einer einspurigen Strasse einander entgegen fahren. Für jeden Fahrer gibt es zwei Möglichkeiten: stur geradeaus fahren oder nach rechts auf das Trottoir ausweichen. (Wir schliessen hier ein Ausschwenken nach links aus.) Also:

	B weicht	B geradeaus
A weicht	0 / 0	5 / -5
A geradeaus	-5 / 5	-20 / -20

Wir stellen uns dabei vor, dass es sich um zwei Fahrer derjenigen Spezies handelt, für die ein Ausweichen einer persönlichen Niederlage gleich kommt, während die sture Haltung ein Gefühl von Überlegenheit beschert. Die payoffs sind so gewählt, dass diese Haltungen umgesetzt werden. Es ist klar, dass der Fall, in dem beide stur geradeaus fahren, besonders schlecht bewertet werden muss...

Man sieht schnell, dass es in diesem Spiel keine dominierte Zeile oder Spalte gibt, so dass keine Reduktion möglich ist. Es gibt aber zwei bemerkenswerte Felder, nämlich das Feld unten links und das Feld oben rechts, also gerade die Felder mit gemischter Strategie:

	B weicht	B geradeaus
A weicht		-5
A geradeaus		-20 / -20

Jedes dieser Felder hat die Eigenschaft, dass wenn ein Spieler unilateral von seiner Strategie abweicht, während der andere festhält, der Abweichler leidet. Solche Felder sind zweifellos besonders interessant und spielen in der Spieltheorie eine grosse Rolle; deshalb haben sie einen eigenen Namen erhalten:

Definition:
Ein n-Tupel von Strategien für n Spieler heisst *Nash-Gleichgewicht*, genau dann wenn kein Spieler seinen payoff erhöhen kann durch unilaterales Wechseln seiner Strategie ($n \in \mathbb{N}$).

JOHN NASHS grosse Leistung war natürlich nicht diese Definition sondern ein Theorem, welches behauptet, dass jedes Nicht-Nullsummen-Spiel ein Nash-Gleichgewicht besitzen muss, ein Satz, der einen Gleichgewichtssatz von JOHN VON NEUMANN dramatisch ausweitet. Es ist vor allem für diesen Satz und seine Anwendungen, dass JOHN NASH 1994 den Nobelpreis für Wirtschaft erhielt. Natürlich ist mit diesem Existenzsatz noch nicht geklärt, wie genau eines der Nash-Gleichgewichte gefunden werden kann.

Das folgende *Gefangenen-Dilemma* ist eine pointierte und spannende Anwendung solcher Gleichgewichte:

Zwei Einbrecher A und B werden dabei beobachtet, wie sie von einem Juwelier-Geschäft wegrennen, nachdem dort der Alarm losgegangen ist. Die Polizei findet keine Juwelen bei A und B und kann ihnen den Einbruch auch auf keine andere Art nachweisen. Sie findet allerdings je eine Pistole bei jedem Verdächtigen und befragt nun beide in getrennten Räumen. Jeder Verdächtige überlegt sich, dass er den Einbruch abstreiten oder aber zugeben könnte. Falls beides Spieltheoretiker sind, skizzieren sie vielleicht die folgende payoff-Matrix:

	B gesteht	B bestreitet
A gesteht		10
A bestreitet		1 1

und überlegen sich:
- Falls beide gestehen, erhalten sie moderate Gefängnisstrafen (payoff -4).
- Falls beide bestreiten, erhalten sie nur leichte Strafen für Waffenbesitz (payoff 1)
- Falls einer gesteht und der andere abstreitet, wird der eine belohnt (payoff 10), während der andere hart streng bestraft wird (payoff -6).

Das Spiel hat ein Nash-Gleichgewicht, nämlich die grau unterlegte Doppelstrategie. Wenn ein Verdächtiger unilateral von dieser Strategie abweicht, wird er leiden. Wenn beide miteinander reden könnten, wäre allerdings die Doppelstrategie des Abstreitens wesentlich vorteilhafter. Unerhört stark vereinfacht kann man dieses Spiel als ein Abbild der militärischen Aufrüstung sehen, die zwischen 1947 und 1991 von den beiden Blöcken USA und Sowjetunion betrieben wurde. Jeder „Spieler“ musste jährlich entscheiden, ob die Militärausgaben gekürzt oder erhöht werden sollen.

- Wenn beide erhöhen, gewinnen sie relativ wenig.
- Dennoch kann jeder nur verlieren, wenn er unilateral abrüstet.
- Würden allerdings beide sich absprechen, so wäre die Doppelstrategie unten rechts ungleich vorteilhafter, weil enorme Summen für sinnvollere Zwecke genutzt werden könnten.

Spieltheoretische Modelle dieser Art und die Untersuchung von Gleichgewichten sind in den Sozial- und Wirtschaftswissenschaften von grosser Bedeutung. Einmal mehr offeriert die Mathematik mit der Spieltheorie also Anwendungen in Bereichen, die im 17. Jahrhundert, als die ersten Exkursionen in dieses Gebiet unternommen worden sind, niemand ahnen konnte. Der grosse französische Mathematiker Henri Poincaré schrieb einmal (siehe [6]):

> *Mathematics has a triple end: It should furnish an instrument for the study of nature. Furthermore, it has a philosophic end, and, I venture to say, an end aesthetic.*

Wenn wir “*nature*” etwas weiter fassen, um mathematische Anwendungen in allen möglichen alltagspraktischen Disziplinen einzubeziehen, so können wir nur hoffen, mit dem vorliegenden Text kleine Beiträge zu jedem dieser drei Enden der Mathematik geleistet zu haben.

Zum Selbermachen:

Aufgabe 1:
Um das Spiel von Seite 21, 22 etwas interessanter zu machen, können wir die payoff-Regel auch ändern. Bezeichnet etwa x die von A im ersten Zug und y die von B im zweiten Zug gezogene Kugel, so könnten die Auszahlungen etwa auch nach folgender Regel vorgenommen werden:

- payoff von A: $x - \frac{3}{y}$
- payoff von B: $\left(-1\right)^{x+y} \cdot y$

Vervollständigen Sie die daraus sich ergebende payoff-Matrix:

	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
A1	-2 / -0.5	-2 / -0.5						
A2								
A3								

Aufgabe 2:
Durch die folgende Matrix ist ein Zwei-Personen-Nullsummen-Spiel gegeben.

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 7 & -3 \\ 5 & 8 & 2 & 3 \\ 1 & -3 & 6 & -8 \\ 4 & -3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Analysieren Sie das Spiel mit jedem der beiden oben erwähnten Algorithmen.

Aufgabe 3:
a) Lesen Sie den folgenden Auszug aus A. T. Barker, „Evolutionary Stability in the Traveller's Dilemma“, The College Mathematics Journal, Vol. 40, NO. , January 2009

The best description of the game is in [2]; we give a brief overview here. The setup for the Traveler's Dilemma (TD) is two players returning from some tourist destination with identical souvenirs, both of which have been destroyed by inept baggage handlers. An airline representative, with no idea what the odd souvenir is worth, has each traveler write down its value (from 2 to 100 dollars) on a piece of paper. The representative assumes the lower value is more accurate, giving the player who writes it down that amount plus two dollars (as a reward for being honest) and the other player the lower number minus two dollars (as punishment for trying to scam the airline). If the two players write down the same number, they both receive that amount.

The natural strategy in TD is to pick a high number—after all, you can't realize a large payoff unless you write down a large number. The theoretical tools of game theory, however, reach a strikingly different answer: the only rational move is to write down 2, the lowest number that is allowed by the rules of the game. This conclusion is strange enough that we illustrate it in three ways, by discussing dominated and undominated strategies, by bringing in the concept of a Nash equilibrium, and by relating TD to the better known and closely related Prisoner's Dilemma.

A central assumption of game theory is that both players are rational, and that they both know that their opponent is rational. This means that if you're considering writing down 100, you will realize that playing 99 gives an equal or better payoff regardless of your opponent's strategy. So a rational player rejects the 100 strategy, and has to realize that their (rational) opponent will also reject it. Then the same logic applies to 99—it gets beat by 98. And so on. The race to the bottom ends only when the rules of the game force it to end, at the strategy 2. In the language of game theory, strategy j is weakly dominated by strategy $j-1$ once the higher strategies have been eliminated, which is to say that strategy $j-1$ never gets a smaller payoff than strategy j. The only undominated strategy in TD is 2.

Approaching the problem from the standpoint of the Nash equilibrium is very much the same. A Nash equilibrium is a strategy such that if both players choose it, neither can improve their outcome by changing strategy unilaterally. If player one chooses strategy j, player two wants to unilaterally change to strategy $j-1$. Then player one wants to switch to $j-2$. Again, this race ends at the bottom with the strategy 2. If both players write down 2, neither has incentive to switch unilaterally, so 2 is the only Nash equilibrium.

As a final way of illustrating the counterintuitive conclusion that 2 is the best rational strategy, we connect TD to the Prisoner's Dilemma. If the maximum damage you are allowed to claim is changed from 100 dollars to 3 dollars, then TD becomes exactly the Prisoner's Dilemma: claiming 2 dollars of damage is choosing "defect" and claiming 3 is choosing "cooperate". Regardless of your opponent's move, your payoff is higher if you defect than if you cooperate, so defection is the best strategy, both in theory and intuitively. The theory doesn't change when the maximum claim is increased from 3 to 100, but intuitively the game changes a great deal. Somehow the existing definitions in game theory can't "see" the difference between 3 and 100. Here

b) Erstellen Sie die payoff-Matrix für das Traveller's Dilemma und N=6 statt 100. Zeigen Sie, dass die Strategie 2 ein Nash-Gleichgewicht ist.

Quellenangaben:

[1] Edward Packel, *The Mathematics of Games and Gambling*, The Mathematical Association of America, Washington, 2006

[2] Douglas R. Hofstadter, *Gödel, Escher, Bach*, Klett-Cotta, Stuttgart, 1986

[3] David Hilbert, Paul Bernays, *Grundlagen der Mathematik I*, Springer, Berlin, 1968

[4] Pieter van Delft, Jack Botermans, *Denkspiele der Welt*, Buchclub Ex Libris, Zürich. 1985

[5] B. A. Trakhtenbrot, *Algorithms and Automatic Computing Machines*, D. C. Heath, Boston, 1960

[6] John dePillis, 777 *Mathematical Conversation Starters*, The Mathematical Association of America, Washington, 2002