Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Was wir mit Beweisen NICHT meinen

Zürich, 9. Sept. 2015

Armin P. Barth

KS Baden, MINT-Lernzentrum ETHZ

Was wir mit Beweisen nicht meinen

It is true that you may fool all the people some of the time; you can even fool some of the people all the time; but you can't fool all of the people all the time. (Abraham Lincoln)

$$\forall x\left(P(x)\rightarrow \exists t\left(Z(t)\wedge D(x,t)\right)\right)$$

Zeichensatz der Prädikatenlogik 1. Stufe, Variablen, Prädikate und Funktionen

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Definition:
Alle Variablen und Konstanten sind *Terme*.
Sind $\tau_1,\dots,\tau_{\mu(j)}$ schon Terme, so ist auch $f_j\left(\tau_1,\dots,\tau_{\mu(j)}\right)$ ein Term.
Nichts sonst ist ein Term.
Mit *TM* bezeichnen wir die Menge aller Terme.

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Definition:

i. Sind σ und τ Terme, so ist $\sigma = \tau$ eine *Formel*.

ii. Sind $\tau_1,...,\tau_{\lambda(i)}$ Terme, so ist $P_i\left(\tau_1,...,\tau_{\lambda(i)}\right)$ eine *Formel*.

Formeln vom Typ i. und ii. heissen *Primformeln*.

iii. Sind Φ und Ψ Formeln, so sind auch $\neg\Phi$, $\Phi \wedge \Psi$, $\Phi \vee \Psi$, $\Phi \rightarrow \Psi$, $\Phi \leftrightarrow \Psi$, $\exists x \Phi$ und $\forall x \Phi$ Formeln.

iv. Nichts sonst ist eine Formel.

Mit *FML* bezeichnen wir die Menge aller Formeln.

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Definition: In den Formeln $\forall x(\Phi)$ und $\exists x(\Phi)$ heisst Φ *Wirkungsbereich* des Quantors.
Eine Variable *x* in der Formel Φ heisst *gebunden*, wenn sie sich im Wirkungsbereich eines Quantors $\forall x$ oder $\exists x$ befindet, sonst *frei*.
Eine *Aussage* ist eine Formel ohne freie Variablen. Mit *AUS* bezeichnen wir die Menge aller Aussagen.

Beispiel: $\forall x(x<0 \to x<y) \wedge \exists z\left((0<z) \wedge (z<x)\right)$

x ist in der linken Klammer gebunden und in der rechten frei
y ist in der ganzen Formel frei
z ist in der ganze Formel gebunden ist.
Insbesondere ist die Formel also keine Aussage.

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Die oben eingeführten Begriffe der formalen Sprache hängen ganz wesentlich ab von den beiden Stellenzahlfunktionen $\lambda : I \to \mathbb{N}$ und $\mu : J \to \mathbb{N}$ sowie der Indexmenge *K* der Konstanten.
In diesen „Dingen“ bündelt sich gewissermassen der reale Weltausschnitt, der durch die formale Sprache abgebildet werden soll.
Da der gesamte Sprachaufbau vom Tripel (y, μ, K) abhängt, wollen wir dieses Tripel eine *Sprache* nennen:

Definition: Das Tripel $L := (\lambda, \mu, K)$ nennen wir *Sprache*. Wir schreiben $TM(L)$, $FML(L)$ und $AUS(L)$, um diese Abhängigkeit auszudrücken.

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Logische Axiome	
Axiome der Aussagenlogik	Alle Tautologien
Quantorenlogische Axiome	(Q1) $\forall x \Phi(x) \rightarrow \Phi(\tau)$, falls τ frei für *x* in Φ (Q2) $\forall x(\Phi \rightarrow \Psi) \rightarrow (\Phi \rightarrow \forall x \Psi)$, falls *x* nicht frei in Φ. (Q3) $\Phi(\tau) \rightarrow \exists x \Phi(x)$ (Q4) $\exists x \Phi(x) \rightarrow \neg \forall x \neg \Phi(x)$
Identitätslogische Axiome	(I1) $x = x$ (Reflexivität) (I2) $(x = y) \rightarrow (y = x)$ (Symmetrie) (I3) $(x = y) \wedge (y = z) \rightarrow (x = z)$ (Transitivität) (I4) $(x = y) \rightarrow (P_i(\ldots\ldots, x, \ldots\ldots) \rightarrow P_i(\ldots\ldots, y, \ldots\ldots))$ (I5) $(x = y) \rightarrow f_j(\ldots\ldots, x, \ldots\ldots) = f_j(\ldots\ldots, y, \ldots\ldots)$

& Menge Σ der theoriespezifischen Axiome

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Einsetzregel	Φ $\Phi \to \Psi$ $------(MP)$ Ψ	Φ $--(GN)$ $\forall x \Phi$
Schlussregeln der Prädikatenlogik		

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Definition:

Sei $\Psi \in FML(L)$.
Ein *Beweis* von Ψ ist eine Folge $\Phi_0, \Phi_1, \Phi_2, ..., \Phi_n, \Psi$ von Formeln, wobei jede Formel entweder ein logisches Axiom ist, aus Σ stammt oder aus einer bzw. zwei früheren Formeln durch Anwendung einer der Schlussregeln entstanden ist.

Und wir schreiben: $\boxed{\Sigma \vdash \Psi}$.

Was wir mit Beweisen nicht meinen

Beispiel eines streng formalen Beweises für den Satz $\forall x\left(0 \leq x \cdot x\right)$

1	$\forall x, y\left(x \leq y \quad \vee \quad y \leq x\right)$	Axiom der Totalordnung
2	$\forall y\left(x \leq y \quad \vee \quad y \leq x\right)$	Quantorenlogisches Axiom aus 1
3	$\left(x \leq 0 \quad \vee \quad 0 \leq x\right)$	Quantorenlogisches Axiom aus 2
4	$\forall x, y\left(0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow 0 \leq x \cdot y\right)$	Axiom der Totalordnung
5	$\forall y\left(0 \leq x \wedge 0 \leq y \rightarrow 0 \leq x \cdot y\right)$	Quantorenlogisches Axiom aus 4
6	$\left(0 \leq x \wedge 0 \leq x \rightarrow 0 \leq x \cdot x\right)$	Quantorenlogisches Axiom aus 5
7	$0 \leq x \rightarrow 0 \leq x \wedge 0 \leq x$	Tautologie
8	$0 \leq x \rightarrow 0 \leq x \cdot x$	Kettenschluss
9	$\forall x, y, z\left(x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z\right)$	Axiom der Totalordnung
10	$\forall y, z\left(x \leq y \rightarrow x + z \leq y + z\right)$	Quantorenlogisches Axiom aus 9

…

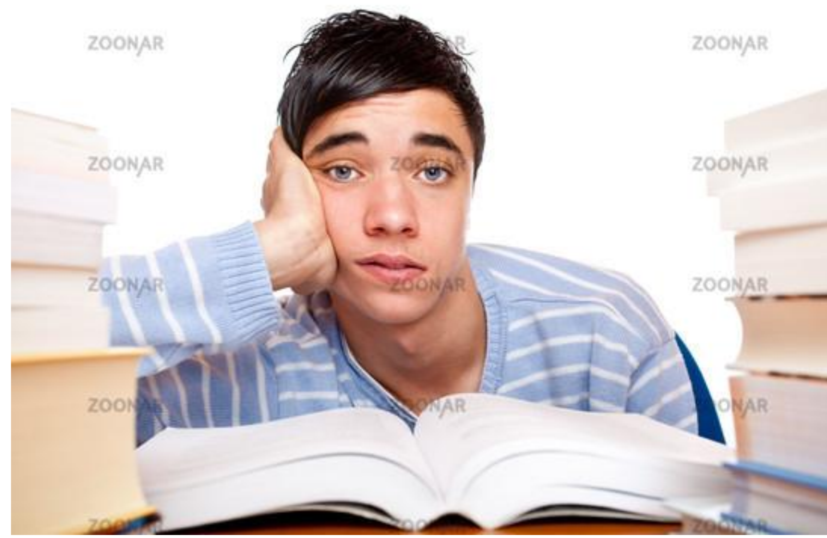
Was wir mit Beweisen nicht meinen

11	$\forall z(x \le 0 \to x+z \le 0+z)$	Quantorenlogisches Axiom aus 10
12	$(x \le 0 \to x+(-x) \le 0+(-x))$	Quantorenlogisches Axiom aus 11
13	$\forall x, y(x+(-x)=0 \wedge 0+y=y)$	Axiom der Totalordnung
14	$\forall y(x+(-x)=0 \wedge 0+y=y)$	Quantorenlogisches Axiom aus 13
15	$(x+(-x)=0 \wedge 0+(-x)=-x)$	Quantorenlogisches Axiom aus 14
16	$x+(-x)=0$	Schlussregel $\frac{\varphi \wedge \psi}{\varphi}$
17	$x+(-x) \le 0+(-x) \to 0 \le 0+(-x)$	Schlussregel aus 16
18	$x \le 0 \to 0 \le 0+(-x)$	Kettenschluss, Zeilen 12, 17
19	$0+(-x)=-x$	Schlussregel $\frac{\varphi \wedge \psi}{\psi}$ aus 15
20	$0 \le 0+(-x) \to 0 \le -x$	Schlussregel aus 19

Was wir mit Beweisen nicht meinen

21	$x \leq 0 \to 0 \leq -x$	Kettenschluss, Zeilen 18,20
22	$\forall x(0 \leq x \to 0 \leq x \cdot x)$	Generalisierungsregel aus 8
23	$0 \leq -x \to 0 \leq (-x)\cdot(-x)$	Quantorenlogisches Axiom aus 22
24	$\forall x((-x)\cdot(-x) = x \cdot x)$	Axiom der Totalordnung
25	$(-x)\cdot(-x) = x \cdot x$	Quantorenlogisches Axiom aus 24
26	$0 \leq (-x)\cdot(-x) \to 0 \leq x \cdot x$	Schlussregel aus 25
27	$0 \leq -x \to 0 \leq x \cdot x$	Kettenschluss, Zeilen 23, 26
28	$x \leq 0 \to 0 \leq x \cdot x$	Kettenschluss, Zeilen 21, 27
29	$(x \leq 0 \vee 0 \leq x) \to 0 \leq x \cdot x$	Schlussregel $\dfrac{\begin{matrix}\varphi \to \sigma \\ \psi \to \sigma\end{matrix}}{(\varphi \vee \psi) \to \sigma}$, Zeilen 8, 28
30	$0 \leq x \cdot x$	Modus Ponens, Zeilen 3, 29
31	$\forall x(0 \leq x \cdot x)$	Generalisierungsregel

Darauf sollten wir uns am Gymnasium nicht einlassen! Sonst…



Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

Idee, die auf ARISTOTELES (analytica posteriora) zurückgeht:

Axiomatische Wissenschaft, deren Aussagen so sicher sind, dass sie unabhängig von Zeit, Geschmack, Umwelt, Forschungsstand,… sind.

Aussagen, die nach Jahrtausenden ebenso gültig sind wie am ersten Tag – vorausgesetzt, das Axiomensystem wird nicht geändert.

Aussagen, die *apodiktisch* sind – im Gegensatz zu den *assertorischen* Aussagen der Naturwissenschaften.

Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

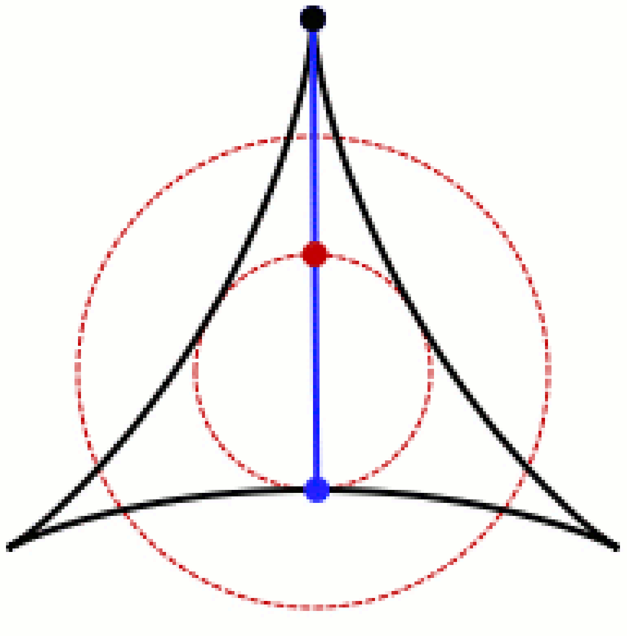
Pierre de Fermat (1662) in einem Brief an den Verleger Claude Clerselier:

Die wichtigste Qualität eines Beweises ist es, **Glauben zu erzwingen** (la qualité essentielle d'une démonstration est de *forcer* à *croire*)

Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

Beweise leisten Überzeugungsarbeit! Gerade bei Aussagen, die zunächst nicht plausibel sind.

1925 löste der russ. Mathematiker Besikowitsch das Kakeya-Nadelproblem, indem er bewies, dass das von einer um 360 Grad rotierenden Strecke der Länge 1 überstrichene Gebiet beliebig klein sein kann.



Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

Alfredo Traps in Dürrenmatts „Die Panne“:

„Beweisen, Kurtchen, Beweisen!“

Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

Luther in einem Brief aus dem November 1518:

„Der Legat oder selbst der Papst sollen nicht nur sagen, Du irrst, Du hast falsch gelehrt, sondern den Irrtum in der Bibel nachweisen und Begründungen anführen.“

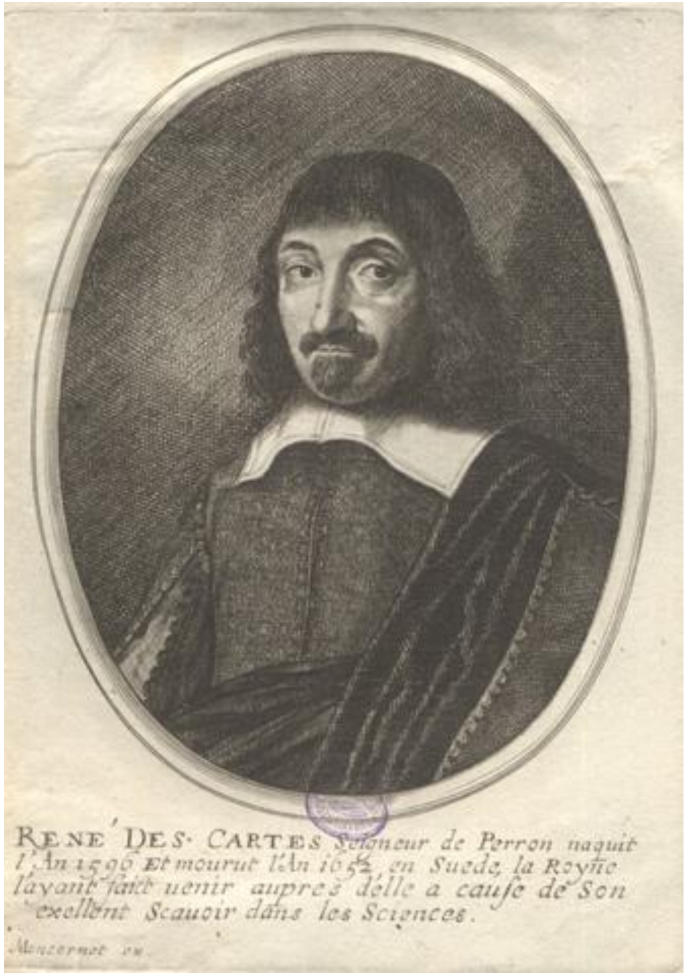
(M. Luther, Werke, Briefwechsel, Band I, Weimarer Ausgabe 1930)

Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

Das mathematische Beweisen setzt die Descartesche Philosophie des Zweifelns fort:

Zweifeln, bis ein fester Stand gefunden ist, von dem aus sich gesicherte neue Aussagen ableiten lassen.

(R. Descartes, *Meditationes de prima philosophia*, 1641)



Beweis: Einsicht und Überzeugung gewinnen

Walter in Heinrich von Kleists „Der zerbrochene Krug“:

„Zur Sache hier. Vom Krug ist hier die Rede. Beweis, Beweis, dass Ruprecht ihn zerbrach!“

Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Beweisen am Gymnasium

Zürich, 9. Sept. 2015

Roman Meier

RG Rämibühl

Aargauische Maturitätsschule für Erwachsene

Beweisen am Gymnasium

Arbeitsdefinition

Unter einem Beweis verstehen wir eine Argumentation, welche einen mathematischen Sachverhalt verständlich, vollständig und korrekt herleitet oder verifiziert.

Beweisen am Gymnasium

Lernziel

- Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man mathematische Sachverhalte verständlich, vollständig und korrekt herleitet und erklärt.

Beweisen am Gymnasium

Lernziel

- Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man mathematische Sachverhalte **verständlich**, vollständig und korrekt herleitet und erklärt.

Beweisen am Gymnasium

Lernziel

- Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man mathematische Sachverhalte verständlich, **vollständig** und korrekt herleitet und erklärt.

Beweisen am Gymnasium

Lernziel

- Die Schülerinnen und Schüler lernen, wie man mathematische Sachverhalte verständlich, vollständig und korrekt herleitet und erklärt.

Wozu?? – 3 Thesen.

Beweisen am Gymnasium

These 1.

- Nur wer einen mathematischen Sachverhalt verständlich, vollständig und korrekt herleiten und erklären kann, hat diesen auch verstanden.

Beweisen am Gymnasium

These 1.

- Nur wer einen mathematischen Sachverhalt verständlich, vollständig und korrekt herleiten und erklären kann, hat diesen auch verstanden.

  - **Kurvendiskussion**

Beweisen am Gymnasium

Methode: Selbsterklärungen.

Paul behauptet: *Wenn die Ableitungsfunktion einer Funktion genau drei verschiedene Nullstellen hat, so besitzt die Funktion ganz sicher ein lokales Maximum.* Hat Paul recht?

Beweisen am Gymnasium

Methode: Selbsterklärungen.

Es sei f eine Funktion, a ein Element aus dem Definitionsbereich.

Beweisen Sie:

Erfüllt f die Bedinungen $f''(a)=0$ und $f'''(a)>0$, so besitzt die Funktion f an der Stelle a einen rechts-links-Wendepunkt.

Wenn die Lernenden eine solche Aussage beweisen können, haben sie das Konzept der Kurvendiskussion verstanden.

Beweisen am Gymnasium

Methode: Selbsterklärungen.

Es sei f eine Funktion, a ein Element aus dem Definitionsbereich.

Beweisen Sie:

Erfüllt f die Bedinungen f’’(a)=0 und f’’’(a)>0, so besitzt die Funktion f an der Stelle a einen rechts-links-Wendepunkt.

Beweisen am Gymnasium

These 2.

Wenn im Mathematikunterricht das Beweisen als Tätigkeit der Lernenden nicht geübt und gepflegt wird, so erhalten diese ein falsches Bild der Mathematik.

- Wichtig ist, was an Prüfungen gefragt wird!

Beweisen am Gymnasium

These 3

Ein Unterricht, welche konsequent das Verstehen der mathematischen Sachverhalte – und damit die Tätigkeit des Beweisens – in den Vordergrund stellt, ist für die Lernenden motivierend und herausfordernd. In dem wir den Schülerinnen und Schülern helfen, die mathematischen Konzepte zu durchschauen, statt sie lediglich zum Rechnen zu verdonnern, tun wir etwas gegen die „Mathematikkrise“ an den Gymnasien.

ETH
Eidgenössische Technische Hochschule Zürich
Swiss Federal Institute of Technology Zurich

Auseinandersetzung mit Beweisen

Zürich, 9. Sept. 2015

Roman Meier

RG Rämibühl

Aargauische Maturitätsschule für Erwachsene

Auseinandersetzung mit Beweisen

-

Definition irrationale Zahl.

Eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R}$ kann nicht auf die Form $x = \frac{p}{q}$ mit $p \in \mathbb{Z}$ und $q \in \mathbb{N}$ gebracht werden. Die Dezimalzahldarstellung einer solchen Zahl ist weder abbrechend noch wird sie periodisch.

Auseinandersetzung mit Beweisen

-

Satz: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational.

Darstellung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $\mathrm{p}, q \in \mathbb{N}$ ist nicht möglich.

Auseinandersetzung mit Beweisen

Satz: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational

Darstellung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $\mathrm{p}, q \in \mathbb{N}$ ist nicht möglich.

Umformen: $2q^2 = p^2$

Auseinandersetzung mit Beweisen

- **Satz: Die Zahl $\sqrt{2}$ ist irrational**

  Darstellung $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ mit $\mathrm{p}, q \in \mathbb{N}$ ist nicht möglich.

  Umformen: $2q^2 = p^2$

  Betrachte Primfaktorzerlegungen von $2q^2$ und p^2.

Auseinandersetzung mit Beweisen

-

Richtig oder falsch?

$\frac{\sqrt{2}}{1}$ ist ein Bruch, also eine rationale Zahl.

Auseinandersetzung mit Beweisen

Richtig oder falsch?

Bei der handschriftlichen Division 13:43 können nur die Reste 0 bis 42 vorkommen, die Dezimalzahldarstellung von $\frac{13}{43}$ muss also periodisch werden.

Auseinandersetzung mit Beweisen

-

Selbsterklärungen

Peter versteht nicht, weshalb die Gleichung $2 \cdot q^2 = p^2$ keine Lösung haben soll. Man kann, so seine Argumentation, $p = \sqrt{2}$ und $q = 1$ setzen, und dann ist die Gleichung gelöst. Stimmt das?

Auseinandersetzung mit Beweisen

Selbsterklärungen

Roman behauptet: *Eine irrationale Zahl ist eine Zahl, bei der die Dezimalschreibweise kein Muster aufweist.*
Erkläre Roman, weshalb er nicht recht hat und formuliere eine entsprechende korrekte Aussage.

Auseinandersetzung mit Beweisen

-

Falsche «Beweise»

$\sqrt{4}$ ist irrational. Beweis: Ich nehme an, es gäbe natürliche Zahlen p und q mit $\frac{p}{q} = \sqrt{4}$. Dann quadriere ich die Gleichung und multipliziere sie mit q^2. So erhalte ich $p^2 = q^2 \cdot 4$, und diese Gleichung kann keine Lösung haben, weil in der Primfaktorzerlegung von p^2 die Zahl 4 in gerader Anzahl vorkommt, in der Primfaktorzerlegung von $q^2 \cdot 4$ jedoch in ungerader Anzahl.