



Mochizukis Beweis ist über 500 Seiten lang und basiert auf vorbereitenden Abhandlungen, die selber schon über 500 Seiten lang sind.

FOTOS: IMAGO, THINKSTOCK; MONTAGE: NCH

Niemand versteht seinen Beweis

Mathematik Der Japaner Shin Mochizuki hat eines der grössten Zahlenrätsel gelöst - oder doch nicht?

VON ARMIN P. BARTH*

Ich habe nie bereut, Mathematiker geworden zu sein. Mathematikerinnen und Mathematiker erproben und überprüfen Argumente. Sie suchen nach wirklich überzeugenden Argumenten für Sachverhalte und decken falsche Argumente schonungslos auf. Ist ein mathematischer Sachverhalt überzeugend und unwiderlegbar begründet, so sagt man, er sei bewiesen.

Als besonders faszinierend habe ich immer diese unumstössliche Sicherheit der mathematischen Aussagen empfunden. Der Satz des Pythagoras oder die Tatsache, dass im ebenen Dreieck die Winkelsumme 180 Grad beträgt, ist heute genauso wahr wie vor zweitausend Jahren. Einmal bewiesene Aussagen bleiben wahr ganz unabhängig von Zeit oder Wissensstand. Welche andere Wissenschaft könnte das von sich behaupten!

Der japanische Mathematiker Shin Mochizuki hat kürzlich behauptet, die sogenannte abc-Vermutung bewiesen zu haben. Dabei handelt es sich um eine recht gut verständliche, aber bisher unbewiesene Vermutung aus der Zahlentheorie, die 1985 von Joseph Oesterlé und David Masser aufgestellt worden ist (siehe Box). Ein Beweis dieser Vermutung wäre eine Sensation, weil damit zahlreiche weitere teils ungelöste Probleme der Zahlentheorie gelöst wären. Insbesondere wüsste man endlich mehr über Prim-

zahlen. Nun würde man denken, dass sich leicht überprüfen lässt, ob Mochizuki recht hat oder nicht. Man muss ja nur seinen Beweis lesen. Hat er die Vermutung tatsächlich bewiesen, wie er behauptet? Leider ist das sehr schwer zu sagen. Um das zu verstehen, sollte man sich vor Augen führen, was ein Beweis genau ist.

Über 500 Seiten für einen Beweis

Ein mathematischer Beweis ist eine Kette unumstösslicher und schlüssig ineinandergreifender Argumente, die den behaupteten Sachverhalt erklären. Dabei dürfen die Argumente die Leserinnen und Leser nicht einfach nur dazu überreden, die Aussage zu glauben, sondern sie müssen, um eine Forderung von Pierre de Fermat anzuführen, erzwingen, dass man sie glaubt. Darum lässt man als Argumente nur bereits früher bewiesene Sachverhalte gelten und Axiome.

Auf diese Weise wächst das Hochhaus des mathematischen Wissens seit über zweitausend Jahren rapide in die Höhe und in die Breite. Jeder neu bewiesene Sachverhalt gründet auf oft zahlreichen früher einmal bewiesenen Sachverhalten. Beispielsweise kann man ja den Satz des Pythagoras, ist dieser einmal streng bewiesen, heranziehen, um damit neue Sätze zu beweisen. Auf diese Weise steht jede neue Etage felsenfest, weil sie nur auf Sätzen gründet, die schon früher streng bewiesen worden sind.

Oft sind mathematische Beweise recht kurz. Alle an Schulen gelehrtten Beweise sind etwa zwischen einer Zeile und einer Seite lang. Dass es unendlich viele Primzahlen gibt, kann man beispielsweise in wenigen Zeilen nachweisen. Und auch wenn solche Beweise sich nicht so mühelos lesen lassen wie eine Seite in einem Kriminalroman, so kann man sie doch in relativ kurzer Zeit gut nachvollziehen - das entsprechende Vorwissen vorausgesetzt.

Aber je komplexer die mathematische Aussage ist, desto länger und schwieriger können auch die Beweise werden. Die Lektüre eines neuen und schwierigen Beweises setzt viel Zeit voraus und zudem viel Spezialwissen, sollte man doch all die unter Umständen zahlreichen Theorien und Sätze, auf die der aktuelle Beweis zugreift, kennen und verstehen. Man muss sozusagen mit den darunterliegenden Etagen in aller Tiefe und Breite vertraut sein, um die Bauweise der neuen Etage nachvollziehen zu können.

Und genau hier ist das Problem: Mochizukis Beweis ist über 500 Seiten lang und basiert auf vorbereitenden Abhandlungen, die selber schon über 500 Seiten lang sind. Zudem verwendet er eine ganz neue und eigens von ihm entwickelte Theorie mit unzähligen neuen Fachbegriffen, die «inter-universale Teichmüller-Theorie» (IUTeich), die bis heute praktisch kein Mensch versteht. Es ist, als hätte er dem Hochhaus ganz al-

DAS PROBLEM

Worum geht es bei der abc-Vermutung?

Betrachten wir zwei teilerfremde positive Zahlen, etwa $a = 9$ und $b = 26$. Während die erste Zahl einzig den Primfaktor 3 hat, hat die zweite Zahl die Primfaktoren 2 und 13. Dass sie keinen gemeinsamen Primfaktor haben, zeigt ja gerade, dass sie teilerfremd sind. Nun bilden wir die Summe c beider Zahlen: $c = a + b = 35$. Diese neue Zahl hat die beiden Primfaktoren 5 und 7. Wenn man nun jeden Primfaktor der drei Zahlen a , b , c genau einmal nimmt und alle miteinander multipliziert, erhält man das Radikal, in diesem Fall $2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13 = 2730$. Offenbar ist das Radikal grösser als c . Das ist aber nicht immer so. Im Beispiel $a = 5$, $b = 27$, $c = 32$ wäre das Radikal gleich 30, also kleiner als c . Die abc-Vermutung handelt davon, ob und wie oft das Radikal grösser oder kleiner ist als die Zahl c . Präzise lautet sie so: Für jede reelle Zahl $\epsilon > 0$ existiert eine positive reelle Konstante K , so dass $c \leq K \cdot (\text{Rad}(abc))^{1+\epsilon}$

lein einen weiteren Flügel angebaut und diesen dann in die Höhe getrieben. Es wird geschätzt, dass Experten, die den Beweis überprüfen könnten, mindestens ein halbes Jahr dafür investieren müssten - Vollzeit.

Mathematik des 22. Jahrhunderts

Darum befindet sich die mathematische Welt aktuell in der merkwürdigen Situation, dass vielleicht eine der berühmtesten Vermutungen endlich bewiesen ist, dass aber niemand das Wissen und die Zeit hat, das zu überprüfen. Ein Kenner der Szene meinte kürzlich, dass IUTeich vielleicht ein Stück Mathematik des 22. Jahrhunderts sei, das aus Versehen ins 21. Jahrhundert gefallen ist.

Immerhin schreibt jetzt Go Yamashita, eine weiterer japanischer Mathematiker, der den ganzen Beweis Zeile für Zeile studiert hat, einen Überblick von 200 bis 300 Seiten Länge, der den Monsterbeweis verständlicher machen soll. Und er wird im März einen Workshop an der Kyushu-Universität halten, der hoffentlich Klärung bringen wird. Mindestens bis dahin hängen wir aber weiterhin in der Luft. Der schiere Aufwand und die unvorstellbare Komplexität des Beweises machen eine Überprüfung fast unmöglich.

Armin P. Barth ist Mathematiker, Gymnasiallehrer und Kolumnist der «Nordwestschweiz».

The Lion sleeps ... im äthiopischen Nationalpark

Gute Nachricht In Ostafrika wurde eine Löwen-Population mit bis zu 200 Exemplaren entdeckt. Die Zahl der Tiere war in vergangenen Jahrzehnten stark rückläufig.

VON ALEXANDRA FITZ

Während seiner Karriere musste er viele Male die Karten mit den Löwenpopulationen korrigieren. Eine nach der anderen konnte er streichen. Doch nun darf der renommierte Löwenschützer Hans Bauer eine hinzufügen. Es sei das erste Mal, und bleibe wahrscheinlich das einzige Mal.

Der Niederländer beschäftigt sich seit Jahren mit dem Schutz der Raubkatzen. Er lebt in Addis Abeba und ist Mitglied von Wildcru, einer Forschergruppe der University of Oxford. Bauer bestätigt nun, dass es im Nordwesten Äthiopiens, im Nationalpark Alatash an der Grenze zum Sudan, eine bisher unbe-

kannte Löwen-Population gibt. In der Grenzregion könnten bis zu 200 Löwen leben. Das ist auch laut Urs Breitenmoser, Berner Raubtierökologe, sehr erfreulich: «Allzu oft mache man die umgekehrte Erfahrung, nämlich, dass Löwen dort nicht mehr gefunden werden, wo sie eigentlich sein sollten.»

Man dachte, das Gebiet hätte im 20. Jahrhundert alle seine Löwen durch die Jagd und die Lebensraumzerstörung verloren. Doch Bauer wollte das nicht glauben. Mit Fotofallen und eindeutigen Spuren konnten er und sein Team nun deren Existenz beweisen. Einheimische gaben an, dass in diesem Gebiet Löwen leben. Doch eine Bestätigung gab es bisher nicht.

Aber wie ist es möglich, dass die Tiere so lange unentdeckt blieben? «Diese Gegend befindet sich im Grenzgebiet, niemand hatte bisher grosses Interesse, dort zu forschen», sagt Löwenschützer Bauer auf Nachfrage der «Nordwestschweiz». «Das Gebiet ist abgelegen, schwer erreichbar und gilt als unsicher», präzisiert Breitenmoser. Er



Mit Fotofallen beweisen die Forscher, dass die Löwen wirklich existieren. BORNFREE

merkt an: «Einige Kollegen fanden, dass Bauer ein zu hohes Risiko eingeht.» Die Tiere seien zudem bei geringer Dichte, im rauen Gelände oder Buschwald nicht leicht nachzuweisen.

Die Forscher glauben, dass es auch im angrenzenden Dinder National Park im Nachbarnland Sudan Löwen gibt. Das ist erfreulich. Dachte man doch, dass die Löwen im Sudan ausgestorben

sind. Die Entdeckung ist sehr bedeutend, weil der afrikanische Löwe als gefährdet gilt. Er ist auf der Roten Liste des IUCN (International Union for Conservation of Nature) unter den vom Aussterben bedrohten Arten. Seit Jahrzehnten ist die Population rückläufig. Seit 1980 hat sie sich mehr als halbiert. 20 000 Löwen gibt es noch in Afrikas Wildnis, in 20 Jahren gibt es laut Exper-

ten des IUCN vielleicht noch die Hälfte. Nun gehe es darum, den Lebensraum dieser Löwen zu schützen. Zum Glück

«Natürlich könnten es Wilderer auf die Löwen abseihen. Aber diese Bedrohung reduzieren wir nur, wenn wir die Tiere ins internationale Rampenlicht rücken.»

Hans Bauer Löwenschützer

ist die Regierung Äthiopiens auch bemüht. Schliesslich, so die Forscher, habe sie das Gebiet kürzlich als Nationalpark ausgewiesen.

Und was ist, wenn Wilderer nun auf die Tiere aufmerksam werden? «Natürlich könnten es Wilderer auf die Löwen abseihen. Aber diese Bedrohung reduzieren wir nur, wenn wir die Tiere ins internationale Rampenlicht rücken», erklärt Bauer. Beim Thema Wilderer dürfte die Unzugänglichkeit des Gebiets wiederum ein Vorteil sein.