Taxifahren im mathematischen Verkehr

- mathematische Pretiosen über Permanente, Permutationen und Determinante

Armin P. Barth

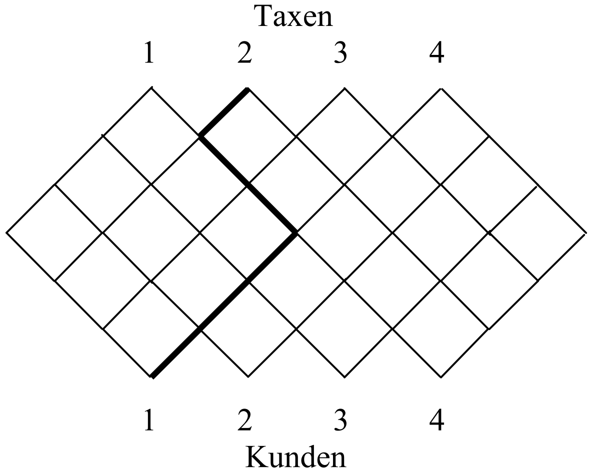
Angelehnt an den herrlichen Artikel [1] wird hier ein graphentheoretisches Rätsel vorgestellt und für die gymnasiale Stufe aufbereitet, das gleich mehrere interessante mathematische Zusammenhänge offenbart. Der Artikel könnte zur Einführung der Determinante dienen oder einfach als ergänzendes Beispiel. Er kann auf jeden Fall dazu benutzt werden, Permutationen einzuführen. Vor allem aber soll er die ungeheure Vielseitigkeit des mathematischen Arbeitens vor Augen führen: das Definieren und Beweisen, das Formalisieren und das Aufstellen von Vermutungen, das Suchen nach eleganten Ideen und das Geniessen von offenbarten Zusammenhängen.

Stichworte: Pascal-Dreieck, Matrix, Permanente, Permutationen, Fehlstand, Signum, Determinante

1. Ein Rätsel

Ein packendes Rätsel kann oftmals Zünder sein für eine anhaltende und neugierige Auseinandersetzung mit Mathematik. Und nicht selten entstehen dann gute Ideen wie von alleine und zeigen, dass jeder Mensch, wenn er sich nur ernsthaft darauf einlässt, in der Lage ist, ein Quentchen Mathematik zu erschaffen.

Dieses Rätsel handelt von 4 Taxen, die, im Norden einer Stadt parkiert, zu 4 Kunden im Süden fahren sollen. Das Streckenmuster stellt die Strassen dar, und es wird verlangt, dass die Taxen immer nur südwärts fahren, entweder südwestlich oder südöstlich (Abb.1). An jeder Kreuzung kann – muss aber nicht – die jeweils andere Richtung gewählt werden. (Als Beispiel ist fett eine Route eingetragen, die Taxe 2 zum Kunden 1 bringt.)



(Abb.1)

Wir formulieren zwei Fragen, die den Antrieb für zwei abwechslungsreiche und gewinnbringende Spaziergänge in die Mathematik liefern sollen. Um die Fragen möglichst präzise formulieren zu können, führen wir noch den Begriff *Kundenbedienung (KB)* ein; darunter verstehen wir (hier) die Angabe von vier Routen, eine pro Taxe, welche entsprechend den oben beschriebenen Regeln von Norden nach Süden führen, so dass bei jedem Kunden genau eine Route endet. (Schliesslich soll ja jeder Kunde von genau einer Taxe abgeholt werden und nicht etwa von zweien oder gar keiner!) Die beiden Fragen lauten:

Frage 1:	Wie viele verschiedene Kundenbedienungen gibt es? (Zwei Kundenbedienungen heissen *verschieden*, genau dann wenn sie sich in mindestens einer Route unterscheiden.)

Frage 2:	Wie viele verschiedene Kundenbedienungen gibt es, wenn zusätzlich verlangt wird, dass sich Routen niemals kreuzen dürfen?

Wir machen uns sofort an die Beantwortung von Frage 1. Die – noch gehaltvollere – Frage 2 wird dann Gegenstand von Abschnitt 4 sein.

2. Eine „permanente“ Antwort auf Frage 1

Die Beantwortung von kniffligen mathematischen Fragen kann oft erleichtert werden, indem das Problem in einfachere Teilprobleme zerlegt wird. Anstatt also nach der Anzahl Kundenbedienungen insgesamt zu fragen, könnten wir einfacher fragen, wie viele Routen es für Taxe 1 gibt, zu einem der Kunden 1 – 4 zu gelangen. Diese Zahlen müssen ja in der Gesamtzahl der Kundenbedienungen irgendeine wesentliche Rolle spielen und sind aus Symmetriegründen überdies dieselben Anzahlen wie für Taxe 4.

Formalisieren wir die Anzahl möglicher Routen von Taxe i zu Kunde j $(1 \le i, j \le 4)$ durch t_{ij}, so suchen wir nun also nach den Werten für $t_{11}, t_{12}, t_{13}, t_{14}$, die identisch sind mit den Werten von $t_{44}, t_{43}, t_{42}, t_{41}$.

Zerstückeln wir die Frage weiter! Die Routen könnten ja detailliert ausgezählt werden, aber man ist versucht zu denken, dass dabei wohl schnell die Übersicht verloren geht. Stattdessen stellen wir fest, dass Taxe 1, um zu einem der Kunden zu gelangen, zuerst entweder die Strasse Richtung Süd-West oder die Strasse Richtung Süd-Ost wählen muss. Die Route von Taxe 1 kann also bloss zwei mögliche Anfänge nehmen, oder – in anderen Worten – die beiden ersten erreichbaren Kreuzungen können je auf genau 1 Art erreicht werden. Wir merken uns daher die Zahlen

$$1 \quad 1$$

Von diesen beiden Kreuzungen ausgehend können in einem Schritt genau 3 weitere Kreuzungen angefahren werden, die linke und rechte auf genau 1 Art und die mittlere auf 2 Arten. Wir merken uns daher die Zahlen

$$\begin{matrix} & 1 & & 1 & \\ 1 & & 2 & & 1 \end{matrix}$$

Von diesen 3 Kreuzungen ausgehend können in einem Schritt genau 4 weitere Kreuzungen erreicht werden, die äussersten auf je genau 1 Art und die beiden mittleren auf je 3 Arten. Wir merken uns daher die Zahlen

$$\begin{matrix} 1 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 & 1 \end{matrix}$$

Erfreulicherweise stellen sich Zahlen ein, die vom Pascal-Dreieck her wohlbekannt sind. Und es wird sehr klar, dass, um die Anzahl Routen hin zu einer bestimmten Kreuzung zu finden, wir nur wissen müssen, wie viele Routen hin zu den beiden Kreuzungen nordwestlich und nordöstlich führen, und dass wir diese beiden Anzahlen addieren müssen. Das ist genau das Prinzip, nach dem die Zahlen im Pascal-Dreieck gebildet werden.

Freilich nimmt unser Pascal-Dreieck hier eine asymmetrische Form an, da nicht von allen Kreuzungen aus Strassen in beide Richtungen führen. Die Anzahl Routen von Taxe 1 zu allen erreichbaren Kreuzungen ist also

$$\begin{matrix} 1 & 1 & & & \\ 1 & 2 & 1 & & \\ 1 & 3 & 3 & 1 & \\ 4 & 6 & 4 & 1 & \\ 10 & 10 & 5 & 1 & \\ 20 & 15 & 6 & 1 & \end{matrix}$$

Folglich ist $t_{11} = 20 = t_{44}$, $t_{12} = 15 = t_{43}$, $t_{13} = 6 = t_{42}$ und $t_{14} = 1 = t_{41}$. Dieselbe Zählmethode liefert die noch fehlenden Zahlen für die Taxen 2 und 3: $t_{21} = 15 = t_{34}$, $t_{22} = 20 = t_{33}$, $t_{23} = 15 = t_{32}$ und $t_{24} = 6 = t_{31}$.

Die Art und Weise der Darstellung von Zwischenresultaten entscheidet oft darüber, ob und wie schnell weiterführende Argumente gefunden werden. Hier drängt sich eine Matrixdarstellung auf, weil die Zahlen t_{ij} für $1 \le i, j \le 4$ darzustellen sind. Wir setzen also

$$T := \left[t_{ij} \right] = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 6 & 1 \\ 15 & 20 & 15 & 6 \\ 6 & 15 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 15 & 20 \end{bmatrix}.$$

Sofort stellt sich die Frage, wie diese Zahlen denn verarbeitet werden müssen, damit die Anzahl Kundenbedienungen gefunden wird. Klar ist, dass, wenn immer Taxe 1 auf einer der 20 möglichen Routen zu Kunde 1 gelangt, für Taxe 2 nur noch die Kunden 2 – 4 übrig bleiben. Legen wir zum Beispiel fest, dass Taxe 2 zu Kunde 4, Taxe 3 zu Kunde 2 und Taxe 4 zu Kunde 3 fahren soll, so gibt es allein für diese Konstellation

$$t_{11} \cdot t_{24} \cdot t_{32} \cdot t_{43} = 20 \cdot 6 \cdot 15 \cdot 15 = 27000$$

mögliche Kundenbedienungen.

Aber das ist längst nicht alles! Taxe 1 könnte auch zu Kunde 3, Taxe 2 zu Kunde 1, Taxe 3 zu Kunde 2 und Taxe 4 zu Kunde 4, usw. Das „usw“ ist von entscheidender Bedeutung; wir müssen eben *genau* wissen, wie es weiter geht und welche Konstellationen möglich sind. Klar ist, dass wir eine Übersicht gewinnen müssen über alle Möglichkeiten, wie jeder Taxe genau ein Kunde zugeordnet werden kann, so dass kein Kunde mehr als einmal bedient wird. Mit anderen Worten, wir suchen sämtliche bijektiven Funktionen der Menge $\{1,2,3,4\}$ in die Menge $\{1,2,3,4\}$. Solche gibt es immerhin 24, denn wenn immer Taxe 1 einem der Kunden 1

– 4 zugeordnet worden ist (wozu es 4 Möglichkeiten gibt), bleiben 3 Möglichkeiten, Taxe 2 einem der restlichen Kunden zuzuordnen, dann 2 Möglichkeiten, Taxe 3 einem der beiden verbleibenden Kunden zuzuordnen, also $4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 4! = 24$ Möglichkeiten insgesamt.

In noch anderen Worten: Wir suchen alle Möglichkeiten, wie in der Matrix T genau 1 Zahl pro Zeile gewählt werden kann, so dass gleichzeitig auch in jeder Spalte genau 1 Zahl gewählt wird. Dazu gibt es eben 24 Möglichkeiten:

$$\begin{bmatrix} 20 & & & \\ & 20 & & \\ & & 20 & \\ & & & 20 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & & & \\ & 20 & & \\ & & & 15 \\ & & 15 & \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 20 & & & \\ & & 15 & \\ & 15 & & \\ & & & 20 \end{bmatrix} \text{ und 21 weitere!} \qquad (1)$$

Also wird **Frage 1** beantwortet durch die Zahl

$$20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20 + 20 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 15 + 20 \cdot 15 \cdot 15 \cdot 20 + \ldots = 650'576$$

Diese Zahl heisst *Permanente* der Matrix, $Perm(T)$.

3. Permutationen eilen zu Hilfe

In ganz natürlicher Weise sind wir in Abschnitt 2 einem wichtigen mathematischen Konzept begegnet: der bijektiven Funktion der Menge $\{1,2,3,4\}$ in sich selber oder – allgemeiner – der bijektiven Funktion der Menge $\{1,2,...,n\}$ in sich selber. Solche Funktionen heissen *Permutationen*. Ziel dieses Abschnittes ist es, einiges Wissenswertes über Permutationen zusammenzutragen; wir haben sie ja schon gestreift, und für die Beantwortung von **Frage 2** werden sie von grosser und eleganter Hilfe sein.

Definition:
Eine bijektive Funktion der Menge $\{1,2,...,n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ in sich selber heisst *Permutation der Zahlen* $1 - n$. Wir verwenden die Buchstaben π, σ für Permutationen. Die Menge aller Permutationen der Zahlen $1 - n$ bezeichnen wir mit S_n. Sind π, σ zwei Permutationen aus S_n, so bezeichnen wir mit $\pi \circ \sigma$ die Komposition; für ein $i \in \{1,2,...,n\}$ ist also $(\pi \circ \sigma)(i) = \pi(\sigma(i))$.

Schreibweise:
Ordnet die Permutation π der Zahl i die Zahl $\pi(i)$ zu, so stellen wir das auch in der Form $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \ldots & n \\ \pi(1) & \pi(2) & \pi(3) & \ldots & \pi(n) \end{pmatrix}$ dar. Mit dieser Notation nehmen die Permutationen in (1) der Reihe nach diese Gestalten an:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \text{ usw.} \qquad (2)$$

Es ist klar, dass die Antwort auf **Frage 1** nun einfacher geschrieben werden kann als

$$Perm(T) = \sum_{\pi \in S_4} t_{1\pi(1)} \cdot t_{2\pi(2)} \cdot t_{3\pi(3)} \cdot t_{4\cdot\pi(4)}$$

In loser Folge notieren wir weiteres Wissenswertes über Permutationen:

a) Wie fast jedes konkrete Beispiel sofort zeigt, ist die Komposition von Permutationen nicht kommunikativ; im Allgemeinen ist also $\sigma \circ \pi \neq \pi \circ \sigma$.

b) Da jede Permutation π bijektiv ist, muss die Umkehrfunktion π^{-1} existieren, und es ist $\pi^{-1} \circ \pi = \pi \circ \pi^{-1} = id$, wenn id die identische Permutation $id(i) = i, \forall i \in \{1, 2, ..., n\}$ bezeichnet.

c) $k \geq 2$ paarweise verschiedene Zahlen $a_1, a_2, ..., a_k \in \{1, 2, ..., n\}$ heissen *Zykel* der Länge k in der Permutation π, wenn $\pi(a_1) = a_2$, $\pi(a_2) = a_3$, ..., $\pi(a_{k-1}) = a_k$, $\pi(a_k) = a_1$ und $\pi(b) = b, \forall b \in \{1, 2, ..., n\} \setminus \{a_1, a_2, ..., a_k\}$. Wir schreiben einen solchen Zykel in der Form $(a_1, a_2, ..., a_k)$. Dank dieser Schreibweise kann etwa die Permutation $\pi = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 1 & 3 & 5 & 4 & 7 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ kürzer als Zykel $\pi = (2, 3, 5, 7)$ geschrieben werden. Ist speziell $k = 2$, so heisst der Zykel *Transposition*. Die 2. Permutation in (2) ist etwa die Transposition $(3, 4)$.

d) Jeder Zykel kann als Komposition von Transpositionen geschrieben werden, da $(a_1, a_2, ..., a_k) = (a_1, a_2) \circ (a_2, a_3) \circ (a_3, a_4) \circ ... \circ (a_{k-1}, a_k)$ ist.

e) Man kann weiter zeigen, dass sich jede Permutation $\pi \in S_n$ in (bis auf Reihenfolge) eindeutiger Weise als Produkt von paarweise disjunkten Zykeln darstellen lässt. Zusammen mit der Bemerkung d) bedeutet das dann, dass jedes $\pi \in S_n$ in (bis auf Reihenfolge) eindeutiger Weise als Produkt von Transpositionen dargestellt werden kann.

f) Zwei Zahlen $i < j$ $(i, j \in \{1, 2, ..., n\})$ heissen *Fehlstand* der Permutation π, falls $\pi(i) > \pi(j)$ ist. In (2) hat die erste Permutation gar keinen Fehlstand, während die 2. Permutation den einzigen Fehlstand $i = 3, j = 4$ und die dritte Permutation den einzigen Fehlstand $i = 2, j = 3$ hat. Die Permutation $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ hat 7 Fehlstände.

g) Bezeichnet α die Anzahl Fehlstände der Permutation π, so wollen wir unter dem *Signum (sgn)* von π die Zahl
$$\text{sgn}(\pi) := (-1)^\alpha = \begin{cases} 1 & \text{, falls } \alpha \text{ gerade} \\ -1 & \text{, falls } \alpha \text{ ungerade} \end{cases}$$
verstehen. Ist $\text{sgn}(\pi) = 1$, so nennen wir die Permutation *gerade*, anderenfalls *ungerade*. Die ersten drei Permutationen in (2) haben der Reihe nach Signum 1, -1, -1; die in f) erwähnte Permutation mit 7 Fehlständen hat Signum –1. Interessierte Tüftler sollten sich überlegen, warum das Signum eines Zykels $(a_1, a_2, ..., a_k)$ gleich $(-1)^{k-1}$ ist.

h) Wie verändert sich das Signum einer Permutation, wenn sie mit einer Transposition komponiert wird? Die Beantwortung dieser Frage wird im Abschnitt 4 eine entscheidende Rolle spielen! Sei dazu $\pi_2 = (a, b) \circ \pi_1$; die zweite Permutation geht also aus der ersten hervor durch Komposition mit einer Transposition. Stellen wir zur besseren Übersicht die beiden Permutationen ausführlicher dar:

$$\pi_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k-1 & k & k+1 & ... & l-1 & l & l+1 & ... & n \\ \pi_1(1) & \pi_1(2) & ... & \pi_1(k-1) & a & \pi_1(k+1) & ... & \pi_1(l-1) & b & \pi_1(l+1) & ... & \pi_1(n) \end{pmatrix}$$

und

$$\pi_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & ... & k-1 & k & k+1 & ... & l-1 & l & l+1 & ... & n \\ \pi_1(1) & \pi_1(2) & ... & \pi_1(k-1) & b & \pi_1(k+1) & ... & \pi_1(l-1) & a & \pi_1(l+1) & ... & \pi_1(n) \end{pmatrix}$$

Wir untersuchen, wie sich die Anzahl Fehlstände verändert, wenn man von π_1 zu π_2 übergeht. Klar ist, dass, falls (k,l) selbst ein Fehlstand von π_1 ist (d.h. $a > b$), dieser in π_2 verschwindet, und dass, falls (k,l) kein Fehlstand von π_1 ist (d.h. $a < b$), dies in π_2 zum Fehlstand wird. Die Idee ist zu zeigen, dass alle restlichen Fehlstände von π_1 entweder auch in π_2 Fehlstand bleiben oder aber immer *paarweise* verschwinden oder hinzu kommen. Daraus folgt dann: α_1 gerade $\Leftrightarrow$ α_2 ungerade; mithin hat π_2 dann entgegen gesetztes Signum!

Zum Beweis betrachten wir nun den Übergang von π_1 zu π_2 detailliert:

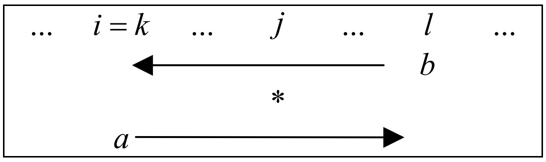
- Für ein beliebiges Paar (i,j) mit $i \neq k$ und $j \neq l$ gilt: Ist (i,j) ein Fehlstand in π_1, so auch in π_2 und umgekehrt. Hier geht also weder ein Fehlstand verloren, noch kommt einer hinzu.
- Für ein Paar (i,j) mit $i < k$ und $j = k$ gilt: Ist (i,k) Fehlstand in π_1, so ist (i,l) Fehlstand in π_2. Ist (i,k) Fehlstand in π_2, so ist (i,l) Fehlstand in π_1. Auch hier geht also weder ein Fehlstand verloren, noch kommt einer hinzu.
- Für ein Paar (i,j) mit $i < k$ und $j = l$ gilt: Ist (i,l) Fehlstand in π_1, so ist (i,k) Fehlstand in π_2. Ist (i,l) Fehlstand in π_2, so ist (i,k) Fehlstand in π_1.
- Analog argumentiert man für Paare (i,j) mit $i = k$ und $j > l$ bzw. $i = l$ und $j > l$.

Fehlstände können offenbar nur verschwinden oder neu entstehen, wenn $i = k$ und $k < j < l$ oder $k < i < l$ und $j = l$. Wir untersuchen nur den ersten dieser beiden Fälle, da der andere analog verläuft:

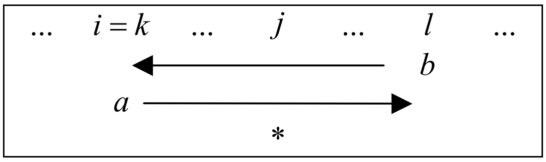
Sei also (i,j) ein Paar mit $i = k$ und $k < j < l$. In den folgenden Abbildungen werden Relationen zwischen Zahlen immer durch den Höhenunterschied dargestellt.

- Ist $a < b$, so sind die drei Situationen in den Abbildungen 2 – 4 denkbar. Abgesehen von (k,l), das in π_1 nicht Fehlstand ist, in π_2 aber schon, entstehen in Abb. 2 zwei zusätzliche Fehlstände, während in den Abb. 3 und 4 die Anzahl Fehlstände invariant bleibt.
- Ist $a > b$, so sind die drei Situationen in den Abbildungen 5 – 7 denkbar. Abgesehen von (k,l), das in π_1 Fehlstand ist, in π_2 aber nicht mehr, verschwinden in Abb. 5 zwei Fehlstände, während in den Abb. 6 und 7 die Anzahl Fehlstände invariant bleibt.

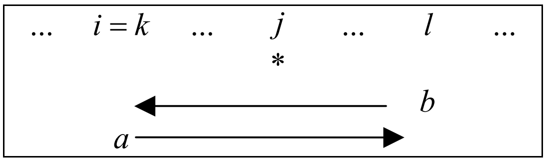
Folglich haben in jedem Fall π_1 und π_2 entgegen gesetztes Signum, was es ja einzusehen galt.



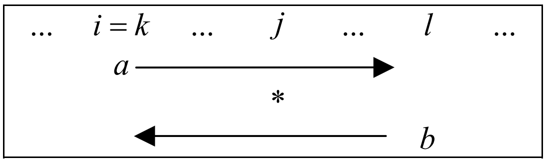
(Abb. 2)



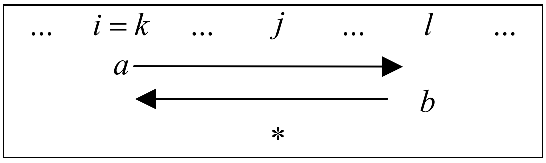
(Abb. 3)



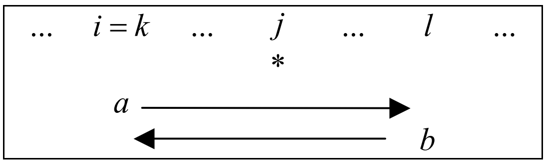
(Abb. 4)



(Abb. 5)



(Abb. 6)



(Abb. 7)

4. Die Determinante beantwortet Frage 2!

Wir haben gesehen, dass wir bei der Beantwortung von **Frage 1** in ganz natürlicher Weise Permutationen begegnet sind. Allerdings drängte es sich noch nicht auf, all das über Permutationen zu lernen, was wir in Abschnitt 3 angehäuft haben. Jetzt aber, bei der Beantwortung von **Frage 2**, ermöglicht gerade das eben Erarbeitete eine raffinierte Lösung.

Offenbar kann jede KB genau einer der Permutationen $\pi \in S_4$ zugeordnet werden. Umgekehrt gib es aber zu jeder Permutation $\pi \in S_4$ viele Kundenbedienungen, was sich schon darin zeigt, dass es nur 4!=24 verschiedene Permutationen der Zahlen 1 – 4 gibt, während es aber – Antwort auf Frage 1 – 650'576 verschiedene Kundenbedienungen gibt. Die Frage ist jetzt, wie viele Kundenbedienungen ausgesondert werden müssen, weil deren Pfade sich teilweise kreuzen! Der Schlüssel zur Beantwortung dieser Frage ist der folgende Hilfssatz:

<u>Lemma</u>	Jeder Kundenbedienung KB1 mit Kreuzung kann in eindeutiger Weise eine zweite Kundenbedienung KB2 mit Kreuzung zugeordnet werden, so dass die diesen beiden Kundenbedienungen zugeordneten Permutationen entgegen gesetztes Signum haben.

Natürlich muss sofort die Neugierde gestillt werden, warum denn dieses Lemma die Beantwortung von **Frage 2** ermöglicht; danach soll es bewiesen werden.

Nun, wenn wir die Antwort auf **Frage 1**,

$$Perm(T) = \sum_{\pi \in S_4} t_{1\pi(1)} \cdot t_{2\pi(2)} \cdot t_{3\pi(3)} \cdot t_{4\cdot\pi(4)},$$

abändern zu

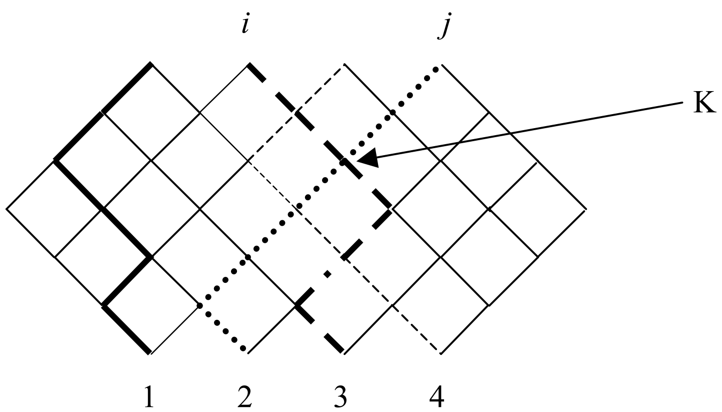
$$\sum_{\pi \in S_4} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot t_{1\pi(1)} \cdot t_{2\pi(2)} \cdot t_{3\pi(3)} \cdot t_{4\cdot\pi(4)},$$

so werden sich – gemäss Lemma – je zwei Kundenbedienungen mit Kreuzung paarweise aufheben, da sie zu Permutationen mit entgegen gesetztem Signum gehören. Es werden dann genau diejenigen Kundenbedienungen übrig bleiben, die keine sich kreuzenden Routen aufweisen, und das ist gerade, wonach **Frage 2** sucht. Überraschend und beeindruckend ist, dass dieser abgeänderte Term gerade die Definition der *Determinante* der Matrix T darstellt, so dass also **Frage 2** beantwortet wird durch

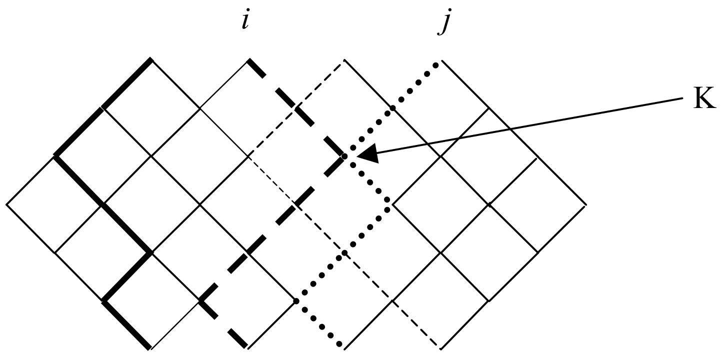
$$\det(T) = \sum_{\pi \in S_4} \operatorname{sgn}(\pi) \cdot t_{1\pi(1)} \cdot t_{2\pi(2)} \cdot t_{3\pi(3)} \cdot t_{4\cdot\pi(4)} = 4116$$

Nun bleibt noch, das Lemma zu beweisen: Sei dazu eine beliebige Kundenbedienung KB1 gegeben, in der mindestens eine Kreuzung auftritt. Sei i ($i \in \{1,2,3,4\}$) die kleinste Zahl, so dass Route i eine Kreuzung aufweist. (Gemäss Voraussetzung muss so ein i existieren.) Sei j ($j \in \{1,2,3,4\}$) die grösste Zahl, so dass Route j Route i schneidet. Sei K die letzte Kreuzung (vor den Kunden), die die Routen i und j aufweisen (vgl. Abb. 8). Sei π_1 die zu KB1 gehörige Permutation.

Nun vertauschen wir einfach die Endstücke der Routen i und j ab der Kreuzung K, d.h. Route i führt neu zu $\pi_1(j)$, und Route j führt neu zu $\pi_1(i)$. Sonst lassen wir alles unverändert. Diese neue Kundenbedienung KB2 gehöre etwa zur Permutation π_2 (vgl. Abb. 9).



(Abb.8)



(Abb.9)

Nun ist offenbar $\pi_2 = \left(\pi_1(i), \pi_1(j)\right) \circ \pi_1$, also gleich der Komposition von π_1 mit einer Transposition. Dies ändert das Signum! Wegen Punkt h) in Abschnitt 2 gilt nämlich: $\operatorname{sgn}(\pi_2) = -\operatorname{sgn}(\pi_1)$, womit das Lemma bewiesen wäre.

5. Schlussbemerkung

Der hier nun implizit entwickelte Satz kann leicht auf beliebige gerichtete und nicht-zyklische Graphen mit je n Ein- und Ausgängen ausgeweitet werden. Ist T diejenige Matrix, die an der Stelle (i, j) die Anzahl möglicher Pfade von Eingang i zu Ausgang j enthält, so ist immer die Anzahl der n-Pfade gleich $Perm(T)$ und die Anzahl der paarweise nicht schneidenden Pfade gleich $\det(T)$. Dieser Satz ist erst seit ungefähr 20 Jahren populär, so dass hiermit eine sicherlich willkommene Gelegenheit besteht, auch moderne Mathematik in den Unterricht einfliessen zu lassen.

[1] Arthur T. Benjamin, Naiomi T. Cameron, „*Counting on Determinants*", AMM, Vol. 112, Number 6, June-July 2005, pp.481 - 492