„Heute machen wir Sinus“ – und (noch) bessere Wege, ein neues Thema einzuführen

Armin P. Barth

Vortrag am Bündner Kolloquium über Mathematik, Informatik und Unterricht, Chur, 14. Mai 2008

Lehrerinnen und Lehrer sind oft das Geld nicht wert, das sie verdienen. Ich weiss, dass es geeignetere und weniger verfängliche erste Sätze für einen Vortrag gäbe, vor allem, wenn man vor Lehrerinnen und Lehrern spricht. Aber ich darf das sagen, ich bin selber ein Lehrer, und ich kann es belegen, ich habe so viele Beispiele von schlechtem Unterricht erlebt, durchaus auch bei mir selber. Unterrichten ist wahnsinnig schwierig, es gibt so viel zu bedenken, es kann so viel schief gehen, ich kann nicht einfach zu einem Experten irgendeines Fachgebietes hingehen und sagen, unterrichte das jetzt, denn er wird es mit grosser Wahrscheinlichkeit nicht können. Etwas wissen und dieses Wissen unterrichten können, sind zwei ganz verschiedene Anforderungen.

Ich behaupte nicht, ein grossartiger Lehrer zu sein, das wäre ein untrügliches Zeichen dafür, dass ich es nicht bin. Aber ich habe sehr viel Erfahrung, und ich setze mich mit der Kunst des Unterrichtens in vielfältiger Weise auseinander. Davon möchte ich Ihnen erzählen. Da aber Unterrichten als Gesamtkunstwerk ein viel zu grosses Unterfangen für einen einzigen Vortrag wäre, beschränke ich mich auf einen einzelnen, aber sehr wichtigen Aspekt: den *Einstieg in ein neues Thema*. Und diesem Aspekt möchte ich mich auf folgende Weise nähern:

(A) indem ich Ihnen ein paar Fakten zu meiner Person erzähle, damit Sie wissen, wen Sie vor sich haben und worauf meine Aussagen gründen,
(B) indem ich die Grundfragen des Vortrages möglichst klar umreisse,
(C) indem ich dann ein paar allgemeindidaktische Aussagen zum Vortragsthema mache und einige prominente Zeugen aufrufe, die meine Aussagen bestätigen - und
(D) indem ich schliesslich möglichst viele ganz konkrete Beispiele dazu bespreche, wie man im Mathematikunterricht in ein neues Thema einsteigen kann.

Ich möchte noch betonen, dass Sie diesen ganzen Vortrag in etwa einer Woche auf meiner Homepage nachlesen und von dort herunterladen können, wenn Sie möchten. Das gibt mir etwas Zeit, darüber nachzudenken, ob ich den ersten Satz wirklich so stehen lassen will oder nicht. Wenn Sie ihn nämlich nur gehört haben, kann ich jederzeit abstreiten, ihn wirklich geäussert zu haben.

Ich packe jetzt also die vier erwähnten Teile des Vortrages in der erwähnten Reihenfolge an.
(Bemerkung zur Pause...)

(A) Zu meiner Person

Ich schlug die typische Lehrerlaufbahn ein: Hochschulstudium, Mathematik in meinem Fall, das Schönste, was es gibt, Assistenz, Diplom des höheren Lehramts, schon über 20 Jahre Berufserfahrung. Nach einigen Vorträgen und Artikeln wurde die ETH auf mich aufmerksam und bat mich, als Praktikumsleiter zu arbeiten, was ich seit vielen Jahren tue.

Nach ungefähr zehn Praktikantinnen und Praktikanten stellte ich fest, dass ich mich ständig wiederholte, dass ich immer ungefähr dasselbe lobte und dasselbe kritisierte. Daher beschloss ich, einen Text zu schreiben, den ich allen künftigen Praktikanten abgeben wollte, noch bevor diese das erste Mal zu mir kamen. Der Text entstand, und ein Kollege las ihn, bevor er den ersten neuen Praktikanten erreichte. Der Kollege riet mir zur Veröffentlichung, und so kam es, dass die Zeitschrift *Gymnasium Helveticum* in schneller Folge zwei Artikel von mir abdruckte: Armin P. Barth, *Was Didaktiker gerne verschweigen* , in: Gymnasium Helveticum, 2/05, und: Armin P. Barth, *Was Didaktiker ausserdem verschweigen*, in: Gymnasium Helveticum, 4/05.

Die Reaktionen waren überaus erstaunlich. Aus der ganzen Schweiz erreichten mich Anrufe, E-mails und Briefe. Fast immer dankte man mir, nicht wenige stellten fest, das hätte endlich mal gesagt werden müssen. Einige Reaktionen siedelte ich irgendwo zwischen belustigend und beängstigend ein:

Jemand adressierte seinen Brief an mich mit den riesigen Lettern „Herrn Weg-Weiser Armin P. Barth“, ein anderer tadelte mich für meine aufwieglerischen Artikel und schrieb: „Dünke Dich nicht weise zu sein, sondern fürchte den Herrn und weiche vom Bösen.“ (‚Herrn’ war allerdings in Grossbuchstaben geschrieben.)

Bald darauf kam ich mit dem Klett-Verlag überein, ein Buch zu veröffentlichen, das aus der Sicht des Praktikers geschrieben sein sollte. Es sollte ein Didaktik-Buch sein, das einen ganz anderen Weg einschlägt also viele, viele Didaktikbücher, die mit zuvor begegnet waren. Einige der wenig erfreulichen Bücher waren vollgestopft mit Diagrammen wie diesen...(FOLIEN)

...und ich habe bis zum heutigen Tag nie verstanden, was sie bedeuten und was ich damit anfangen soll und in wiefern sie mir dabei helfen können, all die vielen kleinen und grossen Schwierigkeiten des Lehreralltages zu bewältigen.

So kam es also, dass im August 2007 der Klett und Balmer Verlag in Zug das Buch Armin P. Barth, *Ereignis Unterricht – Auf dem Weg zur guten Lektion* herausgab. Seither sind die Lehrerkollegien vieler Schulen von ihren Schulleitungen dazu verbrummt worden, sich einen Vortrag von mir anzuhören, was wenigstens für mich eine grosse Ehre und eine überaus interessante Erfahrung war und ist. Für diesen Vortrag, habe ich gehört, soll sogar noch Urs Kirchgraber von der ETH Zürich als Mitinitiator gewirkt haben, was mich besonders freut. Abgesehen davon – und das möchte ich hier betonen – bin ich ein ganz gewöhnlicher Lehrer – oder, um im Sprachspiel eines der oben erwähnten Brief-Schreibers zu bleiben: ein einfacher Diener im Weingarten des Herrn.

(B) Die Grundfragen des Vortrages

Seit mindestens 40'000 Jahren wird die Erde von Menschen bevölkert, deren Gehirne denjenigen der heutige Menschen in etwa gleich sind. Schule dagegen ist vergleichsweise sehr jung. Heute erwartet man von Kindern und Jugendlichen, dass sie in extrem kurzer Zeit Wissen und Fertigkeiten erwerben, deren Erarbeitung Tausende von Jahren benötigt haben und dies zudem unter Mitwirkung von Genies. Diese Aufarbeitung Jahrtausende alten Wissens unter professioneller Anweisung nennt man ‚Schule'.

Es ist klar, dass das hochgesteckte Ziel, das sich die Schule setzt, nicht auf beliebige Art erreicht werden kann. Es braucht dazu Menschen, die sehr viel davon verstehen, wie und unter welchen Bedingungen junge Menschen optimal lernen. Dazu aber unternehmen die heutigen Schweizerischen Hochschulen noch immer zu wenig. Ich erlebe immer und immer wieder Studentinnen und Studenten, die in meine Klassen kommen und sagen: Heute machen wir Sinus, oder: Thema dieser Lektion ist die lineare Funktion, beginnen wir mal mit der Definition, und dann wird ein Titel an die Tafel geschrieben, gefolgt von Theorie und Beispielen und einem Übungsblatt.

Das ist meistens sehr präzise gemacht, weil die mathematische Ausbildung makellos ist, aber es weckt keine Freude, kein Interesse, keine Spannung, keine Neugier. Schülerinnen und Schüler sind durchaus daran gewöhnt, dass einfach jemand ins Zimmer kommt und sagt: Heute behandeln wir den Auftrieb, oder: Heute lernen wir sieben Gesteinsarten kennen, oder: Heute erläutere ich euch den Ablauf des 30-jährigen Krieges, oder: Heute leiten wir den Sinussatz her. Sie sind so sehr daran gewöhnt, dass sie solche Lektionen als gut beurteilen, wenn das Organisatorische im Grossen und Ganzen klappt, während ich selber beim Beobachten fast umkomme.

Daraus ergibt sich eine brennende Frage: Wie kann man das besser machen? Wie kann der Einstieg in ein neues Thema so anregend gemacht werden, dass Schülerinnen und Schüler ein gewisses Mass an Interesse entwickeln, welches dafür sorgt, dass sie das Thema wenigstens teilweise zu ihrem eigenen Thema machen? Wie kann der Einstieg gemacht werden, damit Freude am Fach eher geweckt als gedämpft wird? Wie kann ein neues Thema eingeführt werden, damit eine anregende Lernumgebung geschaffen wird, in der der Erwerb von Wissen und Kompetenzen begünstigt statt abgewürgt wird?

(C) Allgemeindidaktische Antworten auf die Grundfrage des Vortrages

Als ich selber noch zur Schule ging, stieg der Lehrer immer so in das neue Thema ein: Er sagte zum Beispiel: „Heute machen wir Sinus...“; dann schrieb er den Titel an die Tafel und baute Schritt für Schritt die Theorie auf, also die Definitionen, unterbrochen von einigen klärenden Bemerkungen, dann die Sätze und Beweise, unterbrochen von einigen klärenden Beispielen, und dann gab er Hausaufgaben. Das war alles sehr trocken und wenig motivierend, aber mir reichte es, weil ich schon damals rettungslos verliebt in die Mathematik war. Ich dachte zu Hause freiwillig über Mathematik nach und schrieb mathematische Sachen auf, die ich für neu und bedeutend hielt, und ich fand erst später heraus, dass die Welt nicht auf mich gewartet hatte.

Die meisten meiner Mitschüler – Wir waren eine reine Knabenklasse! – fanden den Mathematikunterricht wenig beflügelnd, sie arbeiteten nur mit, weil sie den Lehrer als besonders autoritär und streng wahrnahmen, und sobald sich bei einem Aushilfslehrer die Gelegenheit bot, trieben sie einen überbordenden Unfug, störten den Unterricht mit Zwischenrufen oder trieben ballistische Experimente mit Papierkügelchen oder legten Feuer an einer abstehenden Ecke der Tapete, das dann verblüffend schnell an der Wand hochzüngelte. Die meisten trugen nach der Matura ein negatives Bild der Mathematik in die Welt hinaus. Es war eine Art Unterricht, über den meine Kollegin ELSBETH STERN, über die ich später mehr sagen werde, folgendes Urteil abgeben würde: „*Man geht zur Schule wie zum Zahnarzt und versucht, sich vor dem Schmerz zu drücken oder ihn zu ertragen*.“ (zitiert aus: Reinhard Kahl, „Was Hänschen lernt“, Interview mit Elsbeth Stern, in: Die Zeit, 3.4.2003)

Gegen eine solche Wirkung des Unterrichts müssen wir, meine Damen und Herren, etwas unternehmen. Es steht zu viel auf dem Spiel. Gerade heute ist die Mathematik viel zu wichtig, als dass sie für eine Mehrheit der Schülerinnen und Schüler verloren gehen darf. Das betonte vor zwei Wochen auch der Dekan der Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät der Universität Zürich, Daniel Wyler, indem er in einem Interview die Überzeugung äusserte, dass die grosse Zeit der Mathematik und Naturwissenschaft noch bevorstehe, und dass viele grosse Herausforderungen der heutige Welt nur mit Hilfe dieser Disziplinen zu meistern seien. (Zitiert aus: Alfred Borter, „Forschung wird gross geschrieben“, in: Zürcher Landzeitung, 20. April 2008)

Worauf also müssen wir beim Unterrichten achten, dass eine Mehrheit der Schülerinnen und Schüler der Mathematik gegenüber positiv eingestellt ist und zudem ein realistisches Bild dieser Wissenschaft hat und alles Nötige weiss und kann, um dann an der Hochschule zu bestehen? Diese Frage ist, wie gesagt, viel zu mächtig für einen einzelnen Vortrag. Ich enge sie darum sofort ein und widme mich ab jetzt der Frage, welche günstigen Wege es gibt, in ein neues Thema einzusteigen.

Ich möchte mich dieser Frage zunächst mit ein paar allgemeinen Aussagen nähern, bevor dann (in Abschnitt D) konkrete Vorschläge für den Mathematikunterricht folgen.

1. Konstruktivistische Grundhaltung

ELSBETH STERN, eine bekannte Lehr- und Lernforscherin und seit anderthalb Jahren Professorin an der ETH Zürich, hat zusammen mit dem Schweizer Fritz Staub eine Studie durchgeführt, in der es um die Frage ging, wie sich die Mentalität des Lehrers gegenüber Mathematik auf die Schüler auswirkt. Konkreter: Welche Wirkung zeigt sich bei den Schülern, wenn a) der Lehrer die Mathematik eher als *korrektes Anwenden des zuvor Gelernten* versteht oder b) wenn er sie als *eigenen, aktiven Konstruktionsprozess* versteht. Das Ergebnis war sehr klar: Schüler, die von einen Lehrer vom Typ b) unterrichtet wurden, waren den anderen in Mathematik deutlich überlegen.

Eine andere, ähnlich angelegte Studie von ALEXANDER RENKL, die sog. SCHOLASTIK-Studie, untersuchte 1991 den Mathematikunterricht in mehreren Klassen über einen längeren Zeitraum. Der Fragebogen erfasste unter anderem, ob der Lehrer eine a) eher *rezeptive* oder b) eine eher *konstruktivistische* Grundhaltung gegenüber der Mathematik hat. Rezeptiv war sie zum Beispiel, wenn der Lehrer der folgenden Aussage zustimmte: „Den meisten Schülern muss man zeigen, wie einfache Textaufgaben zu lösen sind.“ Und konstruktivistisch war sie zum Beispiel, wenn der Lehrer der folgenden Aussage zustimmte: „Auch Schüler, die noch kein solides numerisches Faktenwissen erworben haben, können erfolgreich mathematische Probleme lösen.“

Auch hier war der Befund derselbe: Schüler, die von einem Lehrer vom Typ b) unterrichtet wurden, waren den anderen klar überlegen.

(Quelle: E. Stern, F. Staub, “*Mathematik lernen und verstehen: Anforderungen an den Unterricht*”, Max Planck-Institut für Bildungsforschung, Berlin, 2000)

Diese Überlegungen zeigen deutlich, dass wir bei der Einführung in ein neues Thema dafür sorgen müssen, dass die Jugendlichen das Neue erleben als Hilfsmittel, um bei Anforderungen, die sich in der Praxis stellen, noch besser gewappnet zu sein, als ein Hilfsmittel, das uns reicher und erfahrener macht im Hinblick auf das aktive Konstruieren von Lösungen. Und es muss klar werden, dass das primäre Ziel nicht darin besteht, Fakten und Methoden zu lernen, nur um diese dann in ähnlichen Situationen korrekt wiederzugeben.

2. Günstige Motivationsentwicklung

Die Begriffe *intrinsische* und *extrinsische* Motivation sind sehr in Mode. Im ersten Fall wird eine Tätigkeit um ihrer selbst Willen ausgeführt, während man im zweiten Fall einer externen Kontrolle (im Sinne von Belohnung und Bestrafung) unterliegt. Extrinsische Motivation ist ganz sicher nicht grundsätzlich schlecht, in der Schule ist sicherlich beides nötig.

Nach einer Untersuchung von DECI und RYAN (E. L. Deci, R. M. Ryan, „*Intrinsic motivation and self-determination in human behavior*“, New York: Plenum Press, 1985) wird eine günstige Motivationsentwicklung gefördert durch ein Gefühl der Selbstbestimmung und dem Streben nach Autonomie gegenüber direkten Belohnungs- und Bestrafungssystemen. Das heisst für die Schule, dass die Schüler eher bereit sind, sich mit einem neuen Stoff einzulassen, wenn sie die Ziele des Unterrichts mit den eigenen autonom erarbeiteten Zielen ihres Selbstbildes in Übereinstimmung bringen können. Daher sollten Fragestellungen des Unterrichts so gewählt werden, dass sie aus der Situation, in der sich die Schüler befinden, leicht nachvollziehbar und vertraut und interessant sind. Im besten Fall sollten die Schüler genau das wollen, worauf der Unterricht gerade jetzt abzielt. Das *kann* heissen, dass die Fragestellungen der Erlebniswelt der Schüler entnommen ist, das heisst aber viel öfter, dass man alles daran setzt, die Schüler für die Fragestellung zu gewinnen und zu begeistern, so dass sie sie zu ihrer eigenen Fragestellung machen. Jugendliche sind sehr oft für alles mögliche zu begeistern, oder, wie es der französische Humanist FRANCOIS RABELAIS ausdrückte, „Kinder sind keine Fässer, die gefüllt, sondern Feuer, die entzündet werden wollen.“

3. Die Frage nach dem Warum des Stoffes

Der Physiker und Nobelpreisträger RICHARD P. FEYNMAN beschrieb 1952 seine Philosophie des Lehrens so: „*Überlege dir als Erstes, warum du möchtest, dass die Studenten etwas über dieses Thema erfahren, und was sie deiner Meinung nach darüber wissen sollten – dann ergibt die Methode sich mehr oder weniger von selbst aus dem gesunden Menschenverstand*.“

Darin bündelt sich eine ungeheuer wichtige Wahrheit. Der Einstieg in ein neues Thema gelingt viel besser, wenn ich mir in dem Augenblick, in dem ich das Schulzimmer betrete und anhebe, von diesem neuen Thema zu erzählen, in aller Deutlichkeit und Prägnanz bewusst bin, warum ich will, dass die Schülerinnen und Schüler darüber etwas erfahren. Ich muss gewissermassen aufgeladen sein mit den Zielen des Stoffes und den Vorteilen, die er bringt, und den grundlegenden Fragestellungen und der Motivation, sich ihnen zu stellen; wie mit Elektrizität muss ich aufgeladen sein, und dann muss sich all das auf die Jugendlichen übertragen und entladen.

Sie fragen, wie das erreicht werden kann!? Nun, ganz einfach: durch Arbeit! Ich muss zunächst einmal die Versuchung überwinden, das neue Thema dadurch zu rechtfertigen, dass es im Lehrplan steht. Das wäre etwa so, als würde ich eine Person allein deswegen anrufen, weil ihr Name der nächste im Telefonbuch ist; das kann zwar amüsant sein, meistens ist es aber bloss verwirrend, und es bringt mich nicht weiter. Es muss gute, nachvollziehbare oder gar überwältigend klare Gründe dafür geben, dass ich mich zusammen mit 25 Jugendlichen in einem schmucklosen Raum aufhalte und über Sinus rede. Und diese Gründe gelten vor allem für mich als Lehrer, und sie müssen in dem Augenblick, in dem ich beginne, das einzige sein, was zählt, denn nur dann kann ich sie so vertreten, dass die Schüler angesteckt werden und sie zu ihren eigenen Gründen machen. Also bereite ich mich vor, am Abend vor der Lektion und in den zehn Minuten vor der Lektion, mache mir alles Wesentliche bewusst und lade mich auf, und *das* meine ich mit Arbeit. Die Motivation für den neuen Stoff muss zunächst einmal in mir selber neu erarbeitet, meine Begeisterung dafür muss neu entflammt werden. Nur dann .schaffe ich es, den neuen Stoff glaubhaft und überzeugend einzuführen.

Kürzlich ist LUTZ JÄNCKE, ein Professor für Neuropsychologie an der Universität Zürich, mit dem *Credit Swiss Award of Best Teaching* ausgezeichnet worden. Auf die Frage einer Journalistin, was ihn denn so beliebt mache, antwortete er unter anderem: „Ich versuche, meine Begeisterung für die Materie weiterzugeben.“ Dass allein wirkt schon wahre Wunder.

4. The best way to learn is to do

Es gibt Lehrer, deren Unterricht ganz ruhig und unspektakulär ist und die sich selber selten ins Zentrum rücken, aber sie wissen genau, welche Fragen die Schüler weiterbringen, und daher erreichen sie bei den Jugendliche eine sehr gute Ausbildung. Und es gibt Lehrer, die pointenreich und eloquent reden können und sich selber gerne beim Reden zuhören, während die Schüler aber sehr wenig lernen, weil sie eigentlich nichts tun, als dem Lehrer ein Publikum zu sein. Ich weiss das, und ich könnte Namen nennen, aber ich möchte es lieber vermeiden, viele gute Kollegen zu verlieren. Katastrophalerweise gibt es auch Lehrer, die beides nicht können, und glücklicherweise gibt es solche beneidenswerte Lehrer, die beides können. An solchen müssen wir uns orientieren.

Der grosse 2006 verstorbene Mathematiker PAUL HALMOS war ein solcher. Darum kann es uns nicht egal sein, wie er über die Kunst des Unterrichten dachte. In dem Artikel „The problem of learning to teach“ (American Mathematical Monthly 82, 1975, pp.466-476) schrieb er:

“The best way to learn is to do; the worst way to teach is to talk. (…) For a student of Mathematics to hear someone talk about Mathematics does hardly any more good than for a student of swimming to hear someone talk about swimming. You can’t learn swimming techniques by having someone tell you where to put your arms and legs; and you can’t learn to solve problems by having someone tell you to complete the square or to substitute sin(u) for y.”

Das erlebe ich immer wieder: Ein Kollege beklagt sich bei mir über eine Klasse mit den Worten, wie ärgerlich es beim Korrigieren der Prüfung sei zu sehen, dass die Schüler das und das noch immer nicht beherrschten, obwohl er es doch ausführlich behandelt hätte. Meine Gegenfrage ist immer dieselbe: Hast *Du* es gemacht, oder haben die Schüler es *selber* gemacht? Und meistens stellt sich dann heraus, dass der Lehrer den Stoff ausführlich an der Tafel ausgebreitet und erklärt hatte und dass er dann allein deswegen erwartete, dass die Schüler über die nötigen Fähigkeiten verfügten. Aber sie haben ja bloss jemanden darüber reden hören, und das reicht nicht.

Wenn ich also ein neues Thema einführe, so muss ich dafür sorgen, dass die Jugendlichen ausgiebig Gelegenheit bekommen, innerhalb dieses Themas selber zu arbeiten. Dazu eignen sich gute und anregende Fragen, über die gleich noch mehr gesagt wird. Ich muss mir also überlegen, was ein Neuling alles selber tun muss, damit sich in seinem Gehirn genau diejenigen Erkenntnisse und Fähigkeiten herausbilden, die ich im Rahmen dieses Themas für unerlässlich und bedeutend halte. Und dann stelle ich Fragen und Aufgaben, die die gewünschten Tätigkeiten in Gang setzen.

Gerade kürzlich schrieb MICHAEL COCO, ein Professor für Mathematik am Lynchberg College in Lynchburg, USA, ein glühendes Plädoyer dafür, dass Schülern immer wieder die Gelegenheit geboten werden muss, selber Probleme zu lösen. Ein Auszug aus Michael Coco, „*Problem-Solving Across the Curriculum*“, in: MAA FOCUS, April 2008, pp. 10-11:

“What do we ultimately want for our students? If your students were to gain only one thing from class, what would you want it to be? (…) If, as mathematicians, we are capable of leaving our students with only one educational experience it should be the enjoyment of problem solving. (…) throughout their education students should be asked to connect ideas and concepts in various classes. As often as possible the problem-solving ideas and skills should be linked to other courses.”

Dem braucht nichts angefügt zu werden.

5. Gute, anregende Fragen

Ein neues Thema mit einer guten, anregenden Frage zu beginnen, ist ungleich interessanter als mit der Bemerkung einzusteigen, man werde heute das Zeitalter der Romantik kennenlernen oder die vier Grundfragen der Kombinatorik. Die Frage muss aber so sein, dass Schülerinnen und Schüler damit etwas anfangen können, das heisst, sie muss zunächst einmal klar sein, auf Bekanntem aufbauen, sie muss unmittelbar dort ansetzen, wo sich die Jugendlichen jetzt gerade befinden. Sie muss zudem interessant sein oder interessant gemacht werden, das heisst, sie hat mit der aktuellen Lebenssituation der Jugendlichen zu tun, oder aber – was viel häufiger ist – sie wird vom Lehrer so sehr mit Bedeutung aufgeladen, dass sie attraktiv *wird*. Dann muss sie natürlich herausfordernd sein, es muss durchschnittlichen Schülern klar werden, dass sie vor einer nicht ganz einfachen, aber durchaus lösbaren Aufgabe stehen. Und schliesslich muss die Frage eine Ausrichtung haben, auf das nämlich, was wir im aktuellen Stoff erreichen wollen, das heisst, dass wir den Stoff voranbringen dadurch, dass wir die Frage beantworten.

Dazu ein Zitat von ELSBETH STERN aus einem Interview, das ich mit ihr geführt habe. (aus: Armin P. Barth, „*Ereignis Unterricht*“, Klett-Verlag, Zug 2007)

„Lehrer müssen vor allem über Fragen, Aufgaben und Aufträge an die Schüler herantreten. (...) Als Lehrer muss man ein Gefühl dafür bekommen, was für Schüler interessant sein könnte. Die grosse Kunst ist dann, die Lücke zwischen dem Anfangszustand und dem kompetenten Zustand mit Lern- und Übungsaufgaben zu überbrücken. Dazu müssen Fragen, Aufgaben gefunden werden, die eine intellektuelle Herausforderung darstellen, die die Schüler zwingen, ihr Wissen umzustrukturieren und auf die neuen Aufgaben zuzuschneiden, und die gleichzeitig ein Kompetenzerleben ermöglichen. Das ist eine Verstärkung in sich, und das lässt niemanden kalt.“

Konkrete Beispiele solcher Fragen folgen im Abschnitt D dieses Vortrages.

6. pedagocical content knowledge

Kochkunst ist von fundamentaler Bedeutung, doch reicht sie für das erfolgreiche Führen eines Restaurants bei weitem nicht aus. Ebenso benötigt die Lehrperson, will sie eine gute Lektion halten, ein Wissen, das weit über blosses Fachwissen hinausgeht. Sie muss nämlich alle folgenden Fragen ausserdem noch beantworten können:

Wie strukturiert man das Fachwissen? Wie baut man es auf? Wie vermittelt man es erfolgreich? Welche Voraussetzungen sind bei den Jugendlichen vorhanden und welche Schwierigkeiten haben sie beim Erwerb der neuen Inhalte? Wie schafft man effiziente Lernumgebungen? Wie überprüft man, in welcher Qualität das Vermittelte bei den Jugendlichen vorhanden ist? Und wie bewertet man das? Für diese lehrerspezifische Wissen hat der amerikanische Lernforscher LEE SHULMAN den Begriff *pedagogical content knowledge* (fachspezifisches pädagogisches Wissen) geprägt. Fachwissen allein macht ja noch keinen erfolgreichen Lehrer, ebenso wie ein Starkoch nicht automatisch dazu fähig ist, Laien seine Kunst beizubringen.

Von zentraler Bedeutung ist dabei, dass ich weiss, welches der aktuelle Wissensstand der Schülerinnen und Schüler ist, worauf ich also aufbauen kann, ebenso zentral ist es, dass ich um allfällige falsche Vorstellungen weiss, gegen die mein Unterricht nun ankämpfen muss.

Zum Beispiel muss ich, wenn ich in der Grundstufe Geographie unterrichte, wissen, dass bei Kindern immer wieder die falsche Vorstellung angetroffen wird, dass das Wasser des Meeres in die Flussbetten hineinläuft und nicht umgekehrt. Wenn ich an der Mittelstufe Physik lehre, muss ich wissen, dass die Jugendlichen durchaus schon Vorstellungen über ‚Masse' mitbringen, wenn ich diesen Begriff thematisieren will, und dass mein Unterricht nun vielleicht gewisse Vorstellungen verändern oder wenigstens ergänzen muss. Wenn ich am Gymnasium Mathematik unterrichte, muss ich wissen, dass viele Schüler sich die reellen Zahlen als winzige Kügelchen vorstellen, die an einer Schnur aufgereiht sind, so dass es dann also eine erste, eine zweite, eine dritte Zahl usw. gibt – eine Vorstellung, die falscher nicht sein könnte und die Vermehrung des Wissens zu diesem Thema behindert.

Ich muss also, wenn ich ein neues Thema beginne, mir genau überlegen, auf welchem aktuellen Wissen ich aufbauen kann und zu welchen Elementen des neuen Stoffes die Schüler bereits Vorstellungen mitbringen und welche davon wohl falsch oder hinderlich sind.

Um eine gute Lektion zu halten, braucht eine Lehrperson sehr viel Wissen. Dieses eignet sie sich durch Erfahrung an, aber unbedingt auch durch Berücksichtigung und Umsetzung der Resultate der Lehr- und Lernforschung. Zum Beispiel weiss man heute, dass, wie schon weiter oben erwähnt, Lernen am ehesten gelingt, wenn man sich dem Stoff über eine interessante Einstiegsfrage nähert. Man weiss heute, dass man im Unterricht nicht einfach irgendetwas machen kann in der Annahme, das Gehirntraining werde das Gehirn ebenso fit machen, wie sportliche Übungen den Körper fit machen können; das funktioniert nicht. Lernen geschieht immer nur im Zusammenhang mit Inhalten. Ich muss mich also, wenn ich ein neues Thema beginne, fragen, welche Inhalte ich vermitteln will und dann genau diese Inhalte üben.

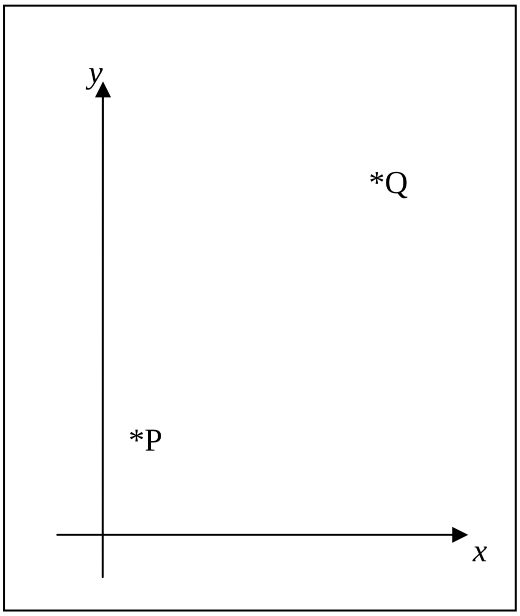
(D) Mathematikspezifische Antworten auf die Grundfrage des Vortrages

An all das, was ich in Abschnitt C gesagt habe (und mehr) sollte ich nun denken, wenn ich ein neues Thema beginne. In diesem Abschnitt möchte ich einige ganz konkrete und mathematik-spezifische Beispiele erläutern:

a) Hier gibt es zunächst zwei Punkte...

Ich möchte mit einem sehr negativen Beispiel beginnen, einer Lektion eines Praktikanten, nennen wir ihn X, bei der es darum ging, in einer Klasse aus 16-Jährigen die lineare Funktion einzuführen. Es war eine traumatische Doppelstunde, und wenn ich das sage, so möchte ich gleich betonen, dass ich natürlich der Meinung bin, Praktikanten sollen und dürfen Fehler machen, wir tun es ja auch, und man hat im Lehrberuf nie ausgelernt. Die Hartnäckigkeit, mit der X seine Fehler *nicht* einsehen wollte, war aber etwas ganz Neues für mich und macht für mich die erwähnte Doppelstunde unvergesslich.

X stand die ganze Doppelstunde fast bewegungslos hinter dem Hellraumprojektor, Schüler konnten sich ausser bei einigen wenigen K1-Fragen nicht beteiligen, sie waren dazu verdammt, abzuschreiben, womit sich die Folie anfüllte. X begann mit einer leeren Folie und der Bemerkung: „Hier gibt es zunächst zwei Punkte...“



Ich war fassungslos, ich fühlte körperlich, wie sich alles in mir aufbäumte. Wieso gab es da zwei Punkte? Wo kamen die her? Warum sollte man sich mit ihnen beschäftigen? Warum sollten sie interessant sein? Was würde man mit ihnen erreichen? Und warum gab es die Punkte ‚zunächst’? Das klang wie eine Drohung. Was gab es denn ausserdem? Und warum? Darüber sagte X nichts. Die Jugendlichen waren bewundernswert geduldig. Sie waren sich gewöhnt, dass einfach jemand kommt und sagt, da sind nun zwei Punkte oder drei Kräfte oder zehn Gesteinsarten oder zwei Angebotskurven oder fünf chemische Stoffe oder dreissig neue Wörter oder acht Fragen zum Kommunistischen Manifest.

In den beiden Lektionen leitete X auf monotonste Weise die Zwei-Punkte-Form der linearen Funktion her und die Schüler lernten nichts ausser, dass es ungeheuer langweilige Lektionen gibt.

b) Bill ist durstiger als John

Das folgende Beispiel eignet sich gut, um höhere Wurzeln einzuführen:

JOHN, BILL, EIN STROHHALM UND ZWEI GLÄSER WASSER.

It was a dark and stormy night. Unable to continue driving, two truck drivers, John and Bill, were stuck at the (clever name here) *Truck Stop* and decided to have dinner together. At the end of their meal, Bill noticed that his water glass was empty while John's glass was still full. Bill was terribly thirsty, and since the waitresses were extremely busy, he stuck his straw in John's glass, put his finger on the top to trap water, moved the straw over to his glass and released the water. He wondered what would happen if he did this over and over again. Would he ever end up with equal amounts of water in the two glasses?

(excerpt from K. Iga, K. Killpatrick, "Truck Drivers, a Straw, and Two Glasses of Water", in: The College Mathematical Journal, Vol. 37, No. 2, March 2006, MAA)

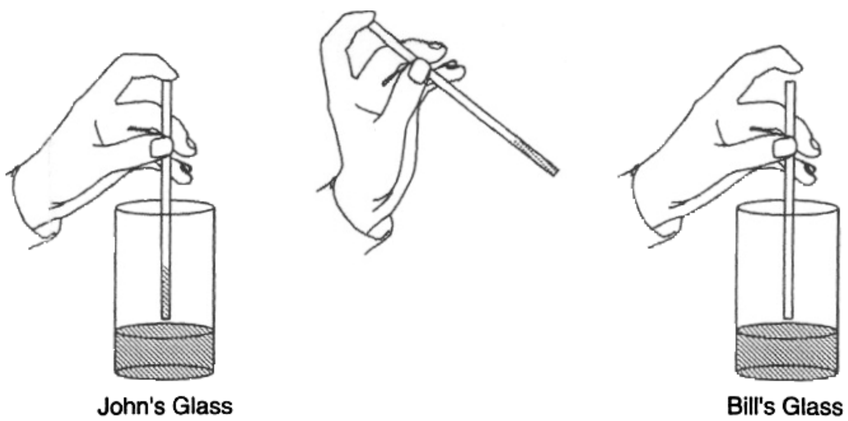


Figure 1. Transferring water with a "straw move."

<u>Annahmen</u>:
- Die Gläser sind identisch und zylindrisch mit Radius R.
- Der Strohhalm hat Radius r.

<u>Aufgaben:</u>

1.) Sei p das Verhältnis $\dfrac{\text{Wasser im Strohhalm}}{\text{gesamte Menge Wasser im Glas}}$. Drücken Sie p allein durch R und r aus. (Im Folgenden nehmen wir an, dass $p \approx 0.015$.)

2.) Wie viel Wasser befindet sich in jedem der Gläser nach einem, zwei, drei, ..., k straw moves?

3.) Lösen Sie nun das eingangs gestellte Problem.

c) Wie schnell ist exponentiell?

Sollen Exponentialfunktionen eingeführt werden, so ist es überaus günstig, auf Beispiele zurückzugreifen, die dem Alltag der Schüler entstammen; solche gibt es glücklicherweise viele!

Beispiele:

- Falten Sie einen Bogen Papier immer wieder in der Mitte. Welche Dicke entsteht nach 1, 2, 3, 4, 5, ..., *n*, ... Faltvorgängen?
- Sie werden gebeten, einen Kettenbrief an zehn Bekannte weiterzusenden (evtl. mit der Aussicht auf einen riesigen Geldbetrag). Wenn *A* den ersten Brief an zehn Bekannte gesandt hat, und wenn jeder Empfänger immer genau 10 weitere Bekannte anschreibt, wie viele Briefe müssen dann in der „Generation“ *n* verschickt werden? Welche Probleme fallen dabei an?
- Geschichte vom Erfinder des Schachspiels, der „ein wenig Reis“ als Lohn verlangte...

Weitere Idee: Schülerinnen und Schüler verfassen in Gruppen einen Artikel (Max. Anzahl Zeichen vorgegeben) für eine fiktive Kolumne namens „Caffè Mathe“) Hier ist ein Beispiel einer solchen zum Thema „Einführung in die Exponentialfunktion“:

Wie schnell ist exponentiell?

Hätte THOMAS MALTHUS recht gehabt, hätte die Menschheit im Jahr 1850 einen Kollaps von beispiellosen Ausmassen erlebt. Schon 1798 sah der britische Ökonom und Sozialphilosoph MALTHUS gigantische Hungersnöte in etwa 50 Jahren voraus, die die Erdbevölkerung drastisch dezimieren würden. Als Begründung rechnete er vor, dass die Menscheit *exponentiell* anwachse, während die Agrarproduktion nur *linear* gesteigert werden könne. Die Folge sei ein so dramatischer Nahrungsmangel, dass weite Teile der Erdbevölkerung kläglich verhungern müssten.

Exponentielles Wachstum ist tatsächlich höchst bedrohlich – oder überaus erfreulich, je nach Situation. Bakterien zum Beispiel vermehren sich unter günstigen Bedingungen exponentiell; das Wundbakterium *Pseudomonas* ist darum eine beständige Sorge der Chirurgen, weil es sich etwa alle 9.8 Minuten verdoppelt und offene Wunden infizieren kann. Andererseits vermehrt sich auch Geld exponentiell, vorausgesetzt, dass es nicht unter der Matratze gelagert wird, sondern der Wirkung eines konstanten Zinses ausgesetzt ist. Was aber bedeutet *exponentiell* genau?

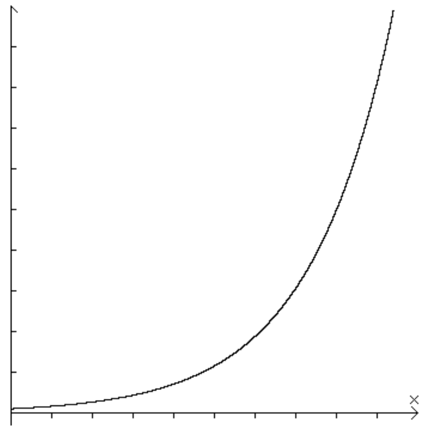


Abb.: Die exponentielle Vermehrung von 1000.- bei einer jährlichen5%-Verzinsung

Eine Grösse wächst exponentiell, wenn sie in gleichen Zeitabständen immer mit derselben Zahl multipliziert wird. Beginnen wir zum Beispiel mit der Zahl 1 und sorgen für eine Verdoppelung (also Multiplikation mit 2) in gleichen Zeitabschnitten, so entsteht das folgende beeindruckende Wachstum: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048, 4096, 8192, 16384, ... Beginnen wir mit einem Geldbetrag von 1000.- und setzen ihn jährlich einer 5%-Verzinsung aus, so wird der Betrag jährlich mit derselben Zahl 1.05 multipliziert. Das führt anfangs zu einem eher unspektakulären Anstieg, bei genügend Zeit und Geduld aber zu einem Wachstum, das alle Erwartungen sprengt. In hundert Jahren etwa würden sich die 1000.- zu 131'500.- entwickelt haben (vgl. Abb.)! Und beginnen wir mit der Zahl 10'000 und multiplizieren sie in festen Zeitabständen mit 0.1, so entsteht der exponentielle *Zerfall* 10'000, 1'000, 100, 10, 1, 0.1, 0.01,... Auch das ist exponentiell.

MALTHUS hatte schon recht, dass ein *lineares* Wachstum gegenüber einem exponentiellen sehr schnell hoffnungslos im Rückstand sein wird. Lineares Wachstum bedeutet, dass in gleichen Zeitabständen immer dieselbe Zahl dazugezählt (addiert) wird. Beginnen wir also wieder mit der Zahl 1 und addieren in festen Zeitintervallen immer 2, so entsteht das lineare Wachstum 1, 3, 5, 7, 9,11, 13, ... Und das ist verglichen mit 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64,... ein Schwächling und absolut chancenlos. Hätte sich die Menscheit tatsächlich exponentiell und die Nahrungsproduktion bloss linear vermehrt, so wäre der Kollaps unausweichlich gewesen. Womit MALTHUS nicht rechnete, war (unter anderem) die Entwicklung von Kunstdüngern und eine beispiellose Mechanisierung, welche die Prozesse der Nahrungsmittelproduktion viel stärker als nur linear zu steigern vermochten.

Auch heute befindet sich die Menschheit in einer Situation, in der Warnungen im Sinne von MALTHUS durchaus angebracht sind. Der Verbrauch an Ressourcen wächst ungeheuerlich, und die Erschliessung neuer Ressourcen scheint damit nicht Schritt zu halten...

d) Helfen Sie Hans Müller!

In der Vektorgeometrie wird oft das Problem behandelt, zwischen zwei windschiefen Geraden im Raum den Abstand zu berechnen. Anstatt die Methode einfach zu lehren, empfiehlt es sich, die Schüler erst mit einem Problem etwa der folgenden Art zu konfrontieren:

HELFEN SIE HANS MÜLLER!

Im Rahmen des NEAT-Bauvorhabens soll Hans Müller den Tunnel und den Lüftungskanal miteinander verbinden. Beide liegen gemäss Planung als Vektorgleichungen vor:

$$t: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$v: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Kann eine lineare Verbindung gegraben werden, die kürzer als 1200 Meter ist? Welches wäre die kürzeste lineare Verbindung?

e) Ein verhängnisvolles Testament

Sehr eng mit dem letzten Beispiel verwandt ist das folgende. Es eignet sich gut, um „den Boden zu ebnen“ für Partialsummen geometrischer Folgen.

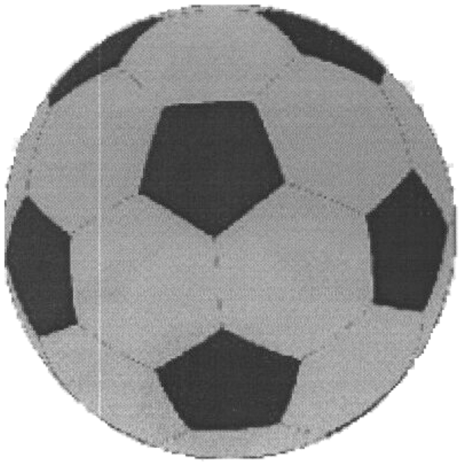
EIN VERHÄNGNISVOLLES TESTAMENT

Die französische Gräfin Elisabeth-Angélique de Beautéville verwitwete im zarten Alter von 20 Jahren. Ihr Gatte liebte sie sehr und hinterliess ihr folgendes Testament: Im ersten Jahr nach seinem Tod wird der Witwe ein Goldstück ausbezahlt, in jedem folgenden Jahr verdoppelt sich die Summe, vorausgesetzt, dass die Gräfin nicht wieder heiratet. Bei einer erneuten Heirat erlischt die Auszahlung sofort.

Die Gräfin lebte noch 69 Jahre, ohne wieder zu heiraten. Wie viele Goldstücke hätte sie insgesamt erhalten müssen?

f) Ungeahnte Probleme mit der EURO ’08

Für die EURO’08 sollen neue Fussbälle hergestellt werden. Die Organisatoren geraten aber in einen Streit über die Frage, wie viele Fünfecke und Sechsecke zur Herstellung eines Fussballs nötig sind. Gibt es mehrere Möglichkeiten? Wenn ja: Welche? Wenn nein: Warum nicht?



Fragen dieser Art eignen sich hervorragend, um in ein neues Thema einzusteigen. Sie sind nahe an der Erlebniswelt der Schüler und sie sind herausfordernd – und es wird im Laufe der Lösung einsichtig, dass eine gewisse Portion „neue Mathematik“ notwendig ist. Auf diese Weise erscheint Mathematik als Mittel zur Bewältigung von Aufgaben und nicht als Theorie zum Selbstzweck.

Im Laufe der Besprechung kommen zur Sprache:
- Polyeder
- Platonische Körper
- Polyedersatz von Euler
- Kohlenstoffmoleküle
- Fullerene
- Neue Schmiermittel, bessere isolierende Materialien, usw.

g) Tote bluten nicht!

Zur Einführung ins Thema „Widerspruchsbeweise“ kann zum Beispiel eine kleine Szene einstudiert und der Klasse vorgeführt werden:

<u>Eine Szene</u>

Ps: Psychiater
Pa: Patient

Ein Patient kommt zum Psychiater.

Pa: Ah, Herr Doktor, Sie müssen mir helfen. Ich bin tot!

Ps: Da kann ich Sie beruhigen, wenn Sie wirklich tot wären, dann wären Sie ja nicht hier.

Pa: Das bin ich auch nicht. Ich bin ja schliesslich tot! Töter. Mausetot!

Ps: Na gut. Dann will ich Ihnen helfen. Ich kann Ihnen beweisen, dass Sie nicht tot sind. Zuerst muss ich Sie aber etwas fragen: Sind Sie einverstanden, dass tote Menschen nicht bluten?

Pa: Ja klar, das weiss ja jedes Kind. Tote bluten nicht mehr.

Ps: O.k. Ich beweise nun, dass Sie nicht tot sind. Lassen Sie uns dazu annehmen, Sie wären doch tot...

Pa: Das stimmt ja auch...

Ps: ...dann dürften Sie also nicht bluten.

Der Psychiater holt eine Nadel hervor (zeigt sie ins Publikum) und sticht den Patienten in den Finger. Dieser blutet.

Pa: (*ganz verblüfft*) Ich blute...

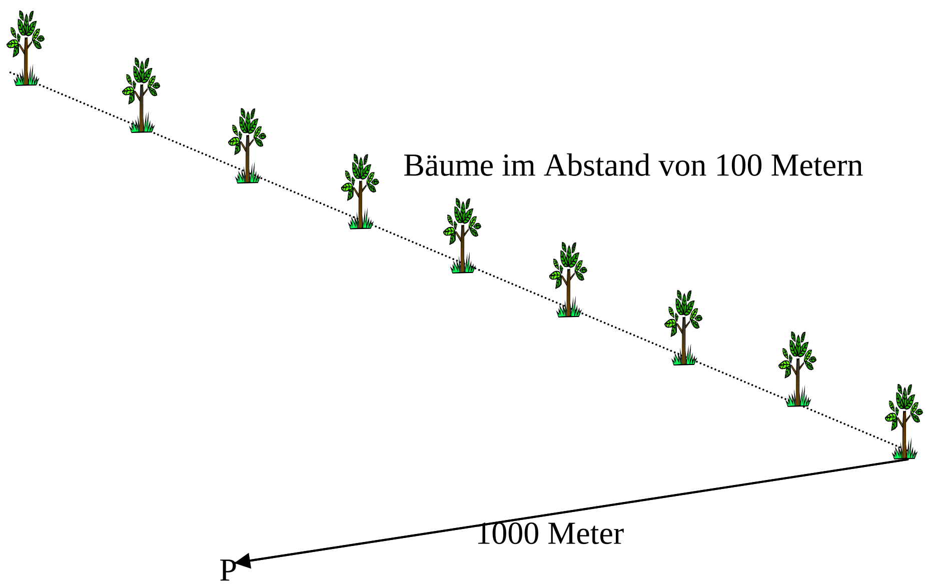
Ps: Sehen Sie, damit haben wir einen Widerspruch. Da Sie bluten, können Sie nicht tot sein. Das widerspricht der Annahme, Sie wären doch tot. Somit ist bewiesen, dass Sie nicht tot sind.

Pa: Nun gut, Sie haben mich überzeugt. Tote Menschen bluten offenbar doch...

h) Schatzsuche mit Tücken

Beim Sinussatz gibt es einen nicht-eindeutigen Fall, wenn nämlich derjenige Dreieckswinkel gegeben ist, der der kürzeren der beiden gegebenen Seiten gegenüber liegt. Anstatt diesen Fall einfach anhand eines abstrakten Dreiecks zu lehren, empfiehlt es sich, für den entscheidenden Punkt „den Boden vorzubereiten“ durch eine anregende Frage:

SCHATZSUCHE:



Gehe vom ersten Baum der Baumreihe unter 45° 1000 Meter weit bis zu einer Stelle P. Gehe von P auf einem geraden Weg auf die Baumreihe zu, so dass du sie nach genau 765 Metern erreichst. Grabe unter dem Baum, der nun am nächsten liegt.

i) PageRank

Rechnen mit Matrizen kann ganz schön trocken sein. Sehr viel Motivation für Matrixrechnen kann geschaffen werden, indem man etwa die folgende Einleitung macht:

Suchmaschinen sind aus dem Internet nicht mehr wegzudenken. Von allen Anfragen, die weltweit getätigt werden, werden 81% bei einer der drei Maschinen Google, Yahoo! und MSN platziert, wobei Google marktführend ist und allein mehr als die Hälfte aller Anfragen erhält. Google wurde im Jahr 1998 von den beiden Computerwissenschaftlern Sergey Brin und Larry Page gegründet, und der Firmenname leitet sich ab vom Wort „Googol", welches die monströse Zahl 10^{100} bezeichnet.

Es wurde schnell offensichtlich, dass die Google-Suchmaschine viel bessere Resultate erzielt als alle anderen Maschinen. Brin und Page verstanden, dass die Reihenfolge, in der Websites angezeigt werden, leicht manipulierbar ist, indem zum Beispiel häufige Suchbegriffe als unsichtbarer Text in der Farbe des Hintergrundes hinzugefügt wird, der dann für den User unsichtbar ist, von den Suchmaschinen aber gelesen und berücksichtigt wird. Daher entschlossen sie sich dazu, einen Algorithmus zu kreieren, der die Manipulation von Websites weitgehend verunmöglicht und Websites in der Reihenfolge der objektiven Wichtigkeit auflistet. Dieser Algorithmus heisst *PageRank*.

Der *PageRank-Algorithmus* ordnet jeder der ungefähr 25 Milliarden Websites einen Rang zu, welcher bei einer Anfrage darüber entscheidet, in welcher Reihenfolge die Sites angezeigt werden. Die Grundidee, von der Brin und Page sich leiten liessen, war die, das Verhalten eines durchschnittlichen *Web Surfers* zu simulieren. Dieses Verhalten soll im Folgenden Schritt für Schritt beschrieben und in Mathematik umgeformt werden, bis wir am Ende schon recht gut verstehen, was sich genau abspielt, wenn wir in einer Suchmaschine eine Abfrage platzieren...

Damit ist die Aufmerksamkeit vieler Schüler bei der Erarbeitung von Elementen der Matrixrechnung schon viel höher. Zur Sprache kommen jetzt:

- Modellierung eines Graphen durch eine Matrix
- Matrizen addieren
- Matrizen mit Vektoren multiplizieren
- Eigenwerte und Eigenvektoren
- Matrizen potenzieren
- ...

j) Beweisen, Kurtchen, beweisen!

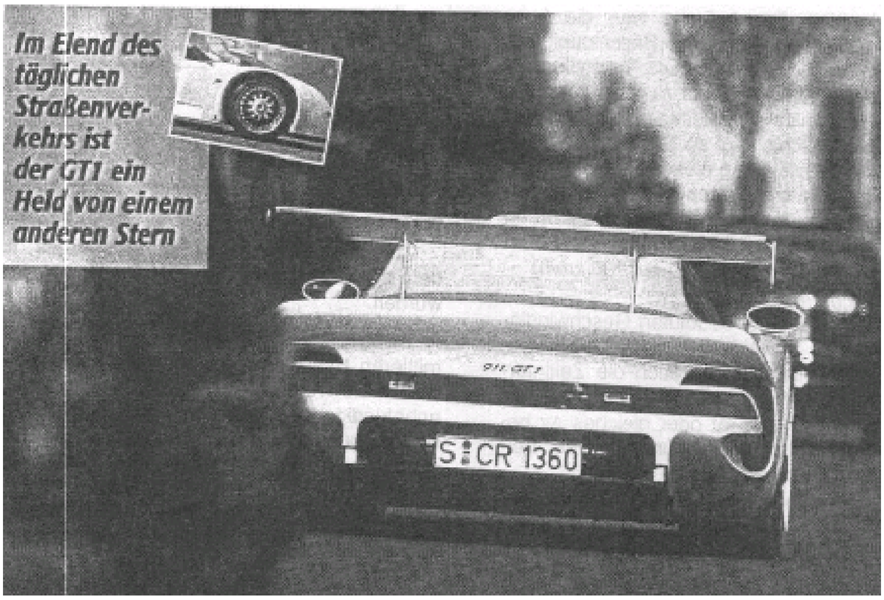
Als Einstieg in das Thema ‚Beweisen' eignet sich zum Beispiel eine Diskussion, die sich etwa nach der Lektüre dieses kurzen Textes ergibt:

> Stellen Sie sich die nicht ganz unrealistische Situation vor, dass Ihre Tochter nach Hause kommt und zu Ihnen sagt: „Du, mein Lehrer will, dass ich beweise, dass die Winkelsumme im ebenen Dreieck 180° beträgt. Kannst Du das?"
> Hier ist eine Liste von (teils nicht ganz ernst gemeinten) Antworten, die Sie als Vater oder Mutter geben könnten:
> - Gemäss meiner elterlichen Autorität verfüge ich, dass das zutrifft!
> - Ich kenne drei Experten auf diesem Gebiet, Herr Dr. Meier, Frau Prof. Müller und Herr Dr. Dr. hc. Huber. Alle sind der Meinung, dass die Winkelsumme im Dreieck 180° beträgt; dann muss es wohl stimmen.
> - Es gibt Dinge im Leben, meine Tochter, die kann man nicht verstehen, die muss man einfach glauben.
> - Zeichnen wir doch mal ein Dreieck und messen nach.
> - Das hat sicher früher schon mal jemand bewiesen, also wozu es nochmals tun!?
> - Ich habe nicht die leiseste Ahnung, und wen interessiert das schon.

Danach verschafft eine Werkstatt den Schülern die Möglichkeit, mit verschiedenen Beweisarten in Kontakt zu treten und sie selber auszuprobieren. Beispiel eines Arbeitsauftrages aus der Werkstatt:

k) Eine rasante Fahrt in die Differentialrechnung

Der Porsche 911 GT1 – eine rasante Fahrt in die Differentialrechnung...



Die Abbildung ist der Zeitschrift *auto motor und sport*, Heft 10 1997, p. 24, entnommen. Darin sind auch technische Daten dieses über 1 Million Euro teuren „Helden von einem anderen Stern“ abgedruckt, etwa eine Tabelle, aus der abgelesen werden kann, in wie vielen Sekunden das Fahrzeug welche Geschwindigkeit erreicht. Aus diesen Daten habe ich eine Funktion berechnet, die für die ersten ca. 30 Sekunden näherungsweise die Geschwindigkeit in Abhängigkeit von der Zeit ausdrückt. Hier ist sie:

$$v(t) = 308 \cdot \left(1 - 2^{-0.138437 \cdot t}\right)$$

In dieser Funktion wird t in Sekunden und v in km/h ausgedrückt.

Nun möchte ich Sie mit folgender Frage dazu anregen, eigene Überlegungen anzustellen, die Sie ganz automatisch zu wichtigen Grundlagen der Differentialrechnung führen werden:

FRAGE: *Wie könnte man die Beschleunigung des Fahrzeuges zu einem beliebigen Zeitpunkt in Erfahrung bringen?*

Den „beliebigen Zeitpunkt“ könnte man unterschiedlich auffassen! Man könnte sich fragen, welche momentane Beschleunigung der Porsche zum Zeitpunkt $t = 10\,\text{sec}.$ hat, oder man könnte sich fragen, welche momentane Beschleunigung er zum Zeitpunkt t hat. Beide Auffassungen sind ausserordentlich gewinnbringend, wenn auch die erste sicherlich einfacher zu beantworten ist.

Schreiben Sie unbedingt alle Ihren Ideen auf, ob sie Sie nun weiterbringen oder nicht. Man kann buchstäblich aus jeder Idee lernen! Schreiben Sie ruhig in Stichworten; Hauptsache ist, wir können am Ende Ihre Überlegungen im Detail nachvollziehen! Notieren Sie auch sämtliche Fragen und Antworten, die jemand aus Ihrer Gruppe beisteuert. Sie werden sehen, dass Sie Mathematik selber erschaffen können!

l) Mit diesem Geschenk hat man das Geschenk!

Packen Sie ein würfelförmiges Geschenk (mit Kantenlänge 2) in ein Geschenkpapier vom Format $n \times n$ ein. Welches der folgenden Zahlen *n* ist dafür geeignet?
$n = 8, 7, 6, 5, 4$

Dies ist eine Einstiegsfrage, die äusserst anregend ist und die Schülerinnen und Schüler dazu verleitet, Resultate der Geometrie zu benutzen, die sonst vielleicht nur ungern geübt würden.

m) Ein fachfremdes Beispiel:

> Kürzlich spielte sich in der Kathedrale von Canterbury folgende Szene ab: Ein älterer Mann mit Stock schlendert durch die Kathedrale und bleibt plötzlich wie angewurzelt vor einem Grab stehen. Wie von der Tarantel gestochen beginnt er, mit seinem Stock auf das Steingrab einzuschlagen. Schockiert kommt ein Kirchendiener daher, stellt sich zwischen Grab und den Alten und ruft, Um Himmels Willen, was tun Sie da!? ... In der Diskussion schimpft der Alte dann: „It’s a disgrace. The black prince shouldn’t have a tomb in Canterbury Cathedral!“ Warum? Wieso ist der Alte so schockiert über dieses Grab, und wer ist der schwarze Prinz?
>
> Diese Einstiegsfrage kann zum Beispiel dazu genutzt werden, ein Stück Englische Geschichte zu erzählen. Der schwarze Prinz hiess gar nicht so. Er war der Neffe von König Heinrich 4., einem schwachen König. Der Prinz war ein Schlächter und Massenmörder auf den Kriegsschauplätzen des 100jährigen Krieges zwischen England und Frankreich, der weder Frauen noch Kinder schonte... Der Alte war der Meinung, dass en solcher Mensch kein Grab in einer Kathedrale verdiene...

Schluss

Bei allem, was ich in diesem Vortrag gesagt habe, war der Stoff im Zentrum, das Fachliche, die Vermittlung von Wissen und Fertigkeiten. Das ist gut so, denn das ist die Hauptaufgabe von Schulen. Trotzdem möchte ich dem Schlusspunkt eine etwas andere Färbung geben: Die Vermittlung von Wissen und Fertigkeiten kann noch so raffiniert und noch so gut geplant sein und sich noch so präzise an den Resultaten der Lehr- und Lernforschung ausrichten, der Unterricht wird trotzdem nicht erfolgreich sein, wenn die zwischenmenschliche Basis zwischen der Lehrkraft und den Schülerinnen und Schülern nicht stimmt. Ich habe gerade kürzlich zu diesem Thema einen Aufsatz gefunden, der mich sehr beeindruckt hat und aus dem ich einen Auszug zitieren möchte, um diesen Vortrag zu beenden. Es ist ein Aufsatz von LARRY BOULDIN, dem Vorsteher der Abteilung Mathematik und Wissenschaft am Roane State Community College in Harriman, USA (zitiert aus: Larry Bouldin, „*Cabbages and Kings – A Philosophy of Teaching*“, FOCUS, the Newsletter of the MAA, march 2005, Volume 25, Number 3, pp.10-11.)

“We can discuss technology, the Harvard project, the new and leaner calculus, “the student as a customer”, accountability, group learning, the Web, and whatever else is currently on the minds and tongues of the experts in education. At the end of the day, though, it still boils

down to relationships between the teacher and the student. (…) We who teach must know and continue to learn, be enthusiastic, and love mathematics. We must encourage, respect, and honour our students. We should let them know when we are proud of them and take the time to let them know we believe in them. We must have standards and mercy. We must push and demand and hold out in front of them goals and aspirations and always try to leave them wanting "just a bit more, sir."