Einem Genie über die Schultern schauen…

- Euler trifft auf die Lehr- und Lernforschung

Armin P. Barth

Ich möchte ein neues Thema unterrichten. Welche Ratschläge aus der Lehr- und Lernforschung gilt es dabei zu befolgen? Anhand eines konkreten mathematischen Inhalts sollen Strategien erläutert werden, die als besonders lernwirksam nachgewiesen worden sind.

Über das Wie des Unterrichtens wurde schon immer eifrig debattiert und gestritten. Dabei ist ein striktes Befolgen einer Methode gar nicht das Entscheidende; tatsächlich kann man durchaus mit verschiedenen Methoden vergleichbar guten und lernwirksamen Unterricht erzielen. Gerade in den letzten etwa zwanzig Jahren hat die Lehr- und Lernforschung in zahlreichen empirischen Untersuchungen und Metaanalysen bemerkenswerte Erkenntnisse gewonnen, die den Lehrpersonen zwar nicht die Methode vorschreiben wollen, sie aber mit wertvollen Hinweisen ausstatten können zu der Frage, in welche Tätigkeiten Schülerinnen und Schüler verwickelt werden müssen, wenn ihr Lernen möglichst effektiv und nachhaltig sein soll. Teile dieser Forschungsergebnisse sollen hier exemplarisch erläutert werden. Dazu stellen wir uns vor, wir möchten mit einer Klasse die berühmte, erstmals von Leonhard Euler beantwortete Frage thematisieren, welchen Grenzwert die Summe der Reziproken der Quadrate aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen hat. Analoge Überlegungen können leicht auf fast jedes andere Inhaltsgebiet übertragen werden.

Die Frage lautet also: Wie verhält sich die Summe

$$\boxed{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+.....=?}$$

und wie können wir das unterrichten? Wie können wir die Lernenden zu Entdeckungen und nachhaltigem Lernen anregen? Die Themen der Lehr- und Lernforschung, die sich an diesem Beispiel besonders schön aufzeigen lassen, sind: a) Misskonzepte und Vorwissen, b) kognitiv aktivierende Einstiege, c) Lehrervortrag und Lernaufgaben und d) Selbsterklärungsaufgaben und Metakognition.

a) Vorwissen und Misskonzepte

Beim Unterrichten eines neuen Themas sollte man sich fragen, wie das Vorwissen der Schülerinnen und Schüler beschaffen ist. Abgesehen davon, dass bezüglich Vorwissen natürlich nicht alle Lernenden gleich sind, ist es ratsam, in Erfahrung zu bringen, ob sie mehrheitlich über das Wissen und die Fertigkeiten verfügen, um die neuen Stoffe verstehen, bearbeiten und dem Vorwissen erfolgreich anknüpfen zu können. Die Frage ist dabei nicht: Habe ich als Lehrperson schon alles Notwendige behandelt? Sondern: Verfügen die Schülerinnen und Schüler schon mehrheitlich über das Notwendige? Oder entdecke ich noch Lücken, Lernhindernisse, Misskonzepte und dergleichen?

Guter Unterricht setzt eine genaue Kenntnis der Schülervorstellungen voraus. Die Lehr- und Lernforschung hat gezeigt, dass intellektuelle Leistungen ganz wesentlich davon abhängen, inwiefern es gelingt, Vorwissen zur Bewältigung neuer Anforderungen zu nutzen. Um also möglichst wirksame Lerngelegenheiten anbieten zu können, muss die Lehrperson wissen, wo die Lernenden gerade stehen und welche Fehlkonzepte oder Verständnisschwierigkeiten sie haben könnten.

Die Theorie des *Cognitive load* besagt überdies, dass nicht allzu viel aufs Mal unklar sein sollte, da man sich sonst in den Details verliert und weniger leicht neue Einsichten gewinnen kann.

Im Hinblick auf meine Absicht, die oben erwähnte Reihe zu thematisieren, stelle ich mir etwa folgende Fragen

- Wie gut ist das Konzept der Reihe bei meinen Schülerinnen und Schülern verankert? Sitzen sie nicht etwa einem falschen Konzept von Reihe auf, weil früher vielleicht die Zahlfolge 5, 10, 15, … als Fünferreihe bezeichnet wurde?
- Können meine Schülerinnen und Schüler mit der Sigma-Notation gut umgehen – und woher weiss ich das?
- Wenn ich sage, wir betrachten die Summe der Reziproken der Quadrate aufeinanderfolgender natürlicher Zahlen, sehen sie dann den richtigen Term vor sich? Haben sie vergleichbare Beispiele selber aufgestellt?
- Ist ihnen klar, dass das Aufaddieren unendlich vieler Summanden ein Prozess ist, der durchaus gegen einen endlichen Wert streben kann? Oder haben einzelne von ihnen noch das Misskonzept, dass unendlich viele Summanden zwingend auf einen unendlichen Wert führen müssen?
- Ist ihnen klar, was es heisst, dass eine Folge oder Reihe konvergiert? Wie würden sie selber typischerweise argumentieren? Welche Beschreibungen und Illustrationen würden sie dabei verwenden?
- An einer entscheidenden Stelle plane ich, das Symbol „<“ zu verwenden. Habe ich den Lernenden genügend Gelegenheiten gegeben, die genaue Bedeutung zu verstehen?
- An einer entscheidenden Stelle plane ich, einen Bruchterm umzuformen. Habe ich den Lernenden genügend Gelegenheiten gegeben, den korrekten Umgang mit solchen Termen zu festigen? Sollte ich eventuell im Vorfeld noch ein paar Übungen dazu einschieben?
- An entscheidender Stelle plane ich, einen Koeffizienten-Vergleich bei zwei Polynomen vorzunehmen. Habe die Lernenden das gut verstanden, und wie kann ich diesbezüglich sicher sein?
- usw.

Die verlässlichsten Antworten auf solche Fragen liefern die Lernenden selbst. Daher stelle ich, wenn das nötig ist, solche Fragen in abgewandelter Form gleich der Klasse. Sind nun allfällige Lücken gestopft, Lernhürden beseitigt und Misskonzepte ausgeräumt, so formuliere ich eine kognitiv aktivierende Frage.

b) Kognitiv aktivierende Einstiege

Mit kognitiv aktivierenden Fragen will man die Lernenden an die Grenzen ihres aktuell verfügbaren Wissens heranführen und zwar so, dass sie die Fragestellung als herausfordernd und doch lösbar und immer als interessant und anregend empfinden. Sie sollen erkennen, dass ihr bisheriges Wissen zur Beantwortung noch nicht ausreicht, dass aber eine lohnenswerte Anstrengung den nötigen Ausbau des Wissens liefern wird. Diese Art des Einstiegs wirkt sich sowohl auf das Interesse als auch auf die Lernmotivation positiv aus.

Für unser aktuelles Beispiel könnte das etwas so aussehen:

Wir haben verschiedentlich über Reihen gesprochen und erlebt, dass sie konvergieren können oder auch nicht. Bei arithmetischen und geometrischen Reihen hat sich die Konvergenzfrage als besonders einfach herausgestellt; wie aber können wir vorgehen, wenn eine Reihe vorliegt, die sich nicht einer dieser Klassen zuordnen lässt, wenn wir also nicht in der luxuriösen Situation sind, einfach ein Konvergenz-Kriterium zücken zu können? Die Reihe

$$\boxed{\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^4}+\frac{1}{5^2}+.....=?}$$

ist ein solches Beispiel, und diese Reihe ist ganz besonders interessant:

Der grosse Schweizer Mathematik Leonhard Euler konnte nämlich nachweisen, dass die Reihe gegen den Wert Pi^2/6 konvergiert. Überaus faszinierend daran ist, dass hier offenbar die Kreiszahl Pi ins Spiel kommt, obwohl die Reihe ausschliesslich aus natürlichen Zahlen gebildet wird. Wie kann das sein? Wie können wir verstehen, dass die erwähnte Reihe überhaupt konvergiert? Und wie, dass sie ausgerechnet gegen den Wert Pi^2/6 strebt?

Ein zusätzlicher Reiz besteht darin, dass wir einem Genie über die Schultern schauen können. Wir entdecken unter anderem, wie virtuos Euler mit Mathematik umging, um dieses bemerkenswert Resultat zu finden.

Der solchen Fragen folgende Unterricht ist dann auf vielfältige, aber nicht auf beliebige Weise machbar. Das bedeutet, dass die Lehrperson nicht einfach irgendwas machen kann, um den gewünschten Lernprozess in Gang zu bekommen, dass aber andererseits verschiedene Methoden – geschickt umgesetzt – zu vergleichbar guten Resultaten führen können. Es ist also nicht das pingelige Befolgen einer ganz bestimmten Methode, das zählt. Wir wählen hier einmal einen Lehrervortrag und eine Lernaufgabe.

c) Lehrervortrag und Lernaufgaben

Setzen wir abkürzend den Buchstaben S für die zur Diskussion stehende Reihe, so ist also

$$S = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \ldots$$

Etwas anders geschrieben:

$$S = \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} + \ldots$$

Die Reihe ist zweifellos streng monoton wachsend. Unser Ziel ist zu zeigen, dass sie auch von oben beschränkt ist, denn dann wissen wir, dass sie konvergieren muss, wenn auch noch nicht, wogegen. Im Hinblick auf diese obere Schranke schätzen wir so ab:

$$S < 1 + \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{6} + \ldots$$

Dabei hat jeder Summend die Form

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i+1}.$$

Und es lässt sich leicht nachrechnen, dass

$$\frac{1}{i} \cdot \frac{1}{i+1} = \frac{1}{i} - \frac{1}{i+1}.$$

Benutzen wir diese Umformung, so ist schliesslich:

$$S < 1 + \left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{5}\right) + \ldots = 2$$

Damit wissen wir schon mal, dass die fragliche Reihe gegen eine Zahl <2 konvergieren muss. Aber eben: Wogegen?

<u>Lernaufgabe Teil 1</u>

Alice liegt die folgende Funktion vor: $f : x \mapsto (x+1)(x-4)$. Sie soll nun den Graphen skizzieren.

a) Rufen Sie Alice die Definition von *Nullstelle* in Erinnerung.
b) Welche Nullstelle(n) sollte Alice bei ihrer Funktion also finden?
c) Wie müsste ihr Graph aussehen, und inwiefern spielen die Nullstellen dabei eine wichtige Rolle?

Bob soll nun eine Polynomfunktion 2. Grades finden, die die beiden Nullstellen 2 und 5 hat.

a) Welche Funktion könnte Bob also angeben?
b) Hätte Bob ausser der Funktion in a) auch noch andere Funktionen mit der verlangten Eigenschaft angeben können? Falls ja: Welche? Und wie sähen deren Graphen aus?
c) Welche wesentliche Erkenntnis müssen wir Bob also mit auf den Weg geben?

Lernaufgabe Teil 2:

Leonhard Euler hatte sich unter anderem intensiv mit Polynomfunktionen und ihren Nullstellen beschäftigt. Seine Lieblingsdarstellung war allerdings eine etwas andere. Wenn er zum Beispiel eine Polynomfunktion 2. Grades mit den Nullstellen 3 und 7 angeben sollte, so notierte er meist:

$$f : x \mapsto \left(1-\frac{x}{3}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{7}\right)$$

a) Können Sie begründen, weshalb diese Funktion tatsächlich die verlangten Nullstellen hat?
b) Besteht ein Unterschied zwischen Eulers Darstellung und der Darstellung $(x-3)(x-7)$, die Alice und Bob wahrscheinlich gewählt hätten? Und wenn ja, welcher?
c) Wie hätte Bob seine Funktion notiert, wenn er Eulers Vorliebe teilen würde?
d) Bei welcher Nullstelle wäre Eulers Darstellung nicht möglich? Und warum nicht?

Lernaufgabe Teil 3:

Céline soll eine Polynomfunktion kleinstmöglichen Grades angeben, die genau die sieben Nullstellen –3, –1, 1, 3, 5, 7, und 9 hat.

a) Wenn auch Céline Eulers Vorliebe teilen würde, wie müsste sie ihre Funktion dann notieren?
b) Gibt es auch andere Funktionen mit den verlangten Nullstellen? Und wenn ja: Wie viele und welche?
c) Wie könnte der Graph von Célines Funktion aus a) ungefähr aussehen?

Lernaufgabe Teil 4:

David beschäftigt sich mit der Sinusfunktion. Céline, die David beim Zeichnen des Graphen beobachtet, ruft plötzlich erfreut aus: „Wow, da kann man ja Eulers Idee anwenden!“

a) Wie müsste Davids Bild der Sinuskurve aussehen, damit Sie ihm hohe Genauigkeit und Detailreichtum attestieren würden?
b) Bei genauem Hinsehen sieht Céline mit Bedauern, dass Eulers Idee doch nicht anwendbar ist. Warum nicht?
c) Bob, der diesem fröhlichen Treiben auch zuschaut, ruft plötzlich: „Nimm doch $\frac{\sin(x)}{x}$ statt $\sin(x)$, die ist an der Stelle 0 nicht definiert, hat aber sonst dieselben Nullstelen wie Sinus!“ Die Jugendlichen machen sich sofort an die Arbeit und zeichnen den Graphen von $\frac{\sin(x)}{x}$ auf. Welches Bild sollten sie erhalten?

Lernaufgabe Teil 5:

Céline klatscht erfreut in die Hände und ruft: „Genial! Jetzt können wir ja Sinus als eine Art Polynomfunktion mit unendlichem Grad schreiben!" An welche Darstellung denkt Céline wohl? (Achtung: Stellen Sie sicher, dass alle Nullstellen berücksichtigt werden, auch die negativen!)

$$\frac{\sin(x)}{x}=\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\cdot\left(1-\frac{x}{3\pi}\right)\cdot\left(1+\frac{x}{3\pi}\right)\cdot.....$$
$$=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdot.....$$

Lernaufgabe Teil 6:

David: „In der Differentialrechnung haben wir die folgende Reihe behandelt:

$$\frac{\sin(x)}{x}=1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-.....$$

Dann müssten doch eigentlich diese Reihe und unsere eigene Reihe übereinstimmen, oder?"

a) Wenn David recht hat, welche beiden Polynome müssten dann also übereinstimmen?

$$1-\frac{x^2}{3!}+\frac{x^4}{5!}-\frac{x^6}{7!}+\frac{x^8}{9!}-.....=\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{2^2\pi^2}\right)\cdot\left(1-\frac{x^2}{3^2\pi^2}\right)\cdot.....$$

b) Stimmen zwei Polynome überein, so stimmen die konstanten Glieder überein und auch die linearen und auch die quadratischen und so weiter. Wie lauten die beiden konstanten Glieder?

$$1=1$$

c) Wie lauten die beiden linearen Glieder?

$$0=0$$

d) Wie lauten die beiden quadratischen Glieder?

$$-\frac{x^2}{3!}=-\frac{x^2}{\pi^2}-\frac{x^2}{2^2\pi^2}-\frac{x^2}{3^2\pi^2}-.....$$
$$\Leftrightarrow \frac{\pi^2}{6}=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+.....$$

d) Selbsterklärungsaufgaben und Metakognition

Angeleitet durch Selbsterklärungsaufgaben sollen sie zentrale Überlegungen in eigenen Worten wiedergeben, Erklärungen zu Sachverhalten, Zusammenhängen und Hintergründen nennen sowie Argumentketten aufbauen oder überprüfen. Gegenüber dem klassischen „Tell and practice-Unterricht“, bei dem die Jugendlichen die Erklärungen zu den Sachverhalten bloss hören und dann sofort in Transferaufgaben anwenden sollen, findet hier eine Zwischenphase statt, in der die Lernenden ihr Verständnis der Stoffe selbständig vertiefen

1. Wie lautet, in Ihren Worten ausgedrückt, die Fragestellung, der wir uns hier gewidmet haben? Und welche zweiteilige Antwort auf diese Fragen haben wir geben können?

2. Welche Strategie haben wir gewählt, um einsehen zu können, dass die Reihe
$$S=\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{5^2}+\ldots$$
konvergiert? Wie würden Sie die Strategie einem Laien erläutern?

3. Wie kann man leicht einsehen, dass
$$S<1+\frac{1}{1}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{5}\cdot\frac{1}{6}+\ldots$$

4. Im Nachweis der Konvergenz haben wir den Schritt
$$\frac{1}{i}\cdot\frac{1}{i+1}=\frac{1}{i}-\frac{1}{i+1}$$
benutzt. Michael behauptet nun, dass ganz allgemein $\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=\frac{1}{a}-\frac{1}{b}$ gilt. Trifft das zu? Begründen Sie!

5. Anna soll eine Polynomfunktion kleinstmöglichen Grades bilden, die die Nullstellen 1 und 4 hat. Sie sagt: „Ich weiss schon mal sicher, dass der Graph eine nach oben offene Parabel sein wird.“ Wie beurteilen Sie Annas Aussage?

6. Wir haben mehrfach darüber nachgedacht, wie man eine Polynomfunktion bilden kann, die einige im Voraus gegebene Nullstellen respektiert. Können Sie die wichtigste Erkenntnis in eigenen erklärenden Worten zusammenfassen?

7. Ralph bemüht sich um eine Polynomfunktion mit den beiden Nullstellen 1 und 7. Er sagt: „Ob man das nun in der Form $(x-1)(x-7)$ darstellt oder in der von Euler präferierten Form, ist einerlei. Es ist ja dieselbe Funktion.“ Hat Ralph recht? Erklären Sie!

8. Wieso gibt es Probleme, wenn man $\sin(x)$ als Polynomfunktion in der von Euler präferierten Art darstellen will? Und welche Abhilfe kann man schaffen?

9. Und so weiter…

Mit metakognitiven Fragen kann man die Lernenden dazu anregen, selbständig über den Stand und die Fortschritte ihres Lernens zu reflektieren. Wo stehen sie gemäss eigener Einschätzung? Was haben sie schon gut verstanden, und zu welchen Punkten bestehen noch welche Unklarheiten?

1. Habe ich gut verstanden, mit welcher Idee Euler zu seinem überraschenden Resultat gelangte? Bei welchen Teilschritten habe ich allenfalls noch Erklärugsbedarf?

2. Ist mir aber auch ganz klar, dass noch immer Erklärungsbedarf besteht? Dass es eben nicht klar ist, dass man Sinus wie eine Polynomfunktion mit unendlich vielen Nullstellen behandeln darf?

3. Wäre ich selber dazu in der Lage, die Grundideen einem Laien gegenüber zu vertreten? Welche diesbezüglichen Schwierigkeiten orte ich bei mir selber noch? Kann ich diese eingrenzen und in präzise Worte fassen?

4. Welche Teile des eben behandelten Themas haben mich besonders fasziniert? Und worin genau besteht das faszinierende?

5. Was habe ich nun alles gelernt? Worin bestehen die wichtigsten Einsichten?

6. Und so weiter…