Matur-Arbeiten im Fach Mathematik

&

Resultate der Lehr- und Lernforschung

Kantonsschule Wattwil

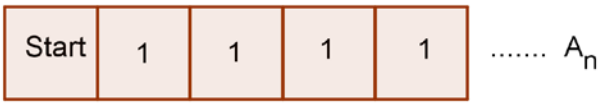
1. September 2012

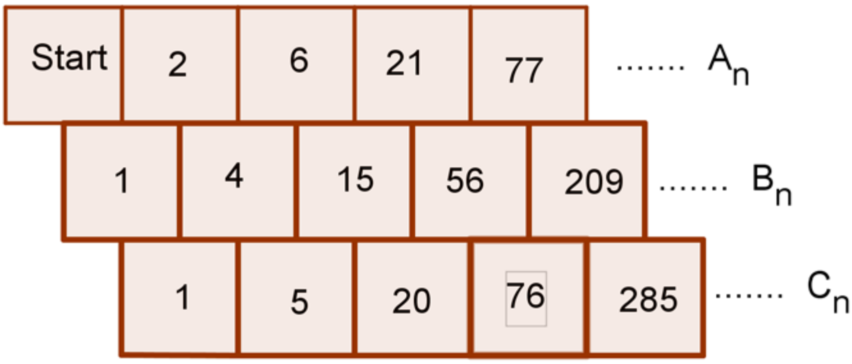
Armin P. Barth (KS Baden, MINT-Lernzentrum ETHZ)
Nikita Kostyuchenko (KS Baden, ehem.)

Inhalt:

- Matur-Arbeiten im Fach Mathematik: Vortrag
- Diskussion
- Pause
- Resultate der Lehr- und Lernforschung: Vortrag
- Diskussion

Ideen für Matur-Arbeiten I

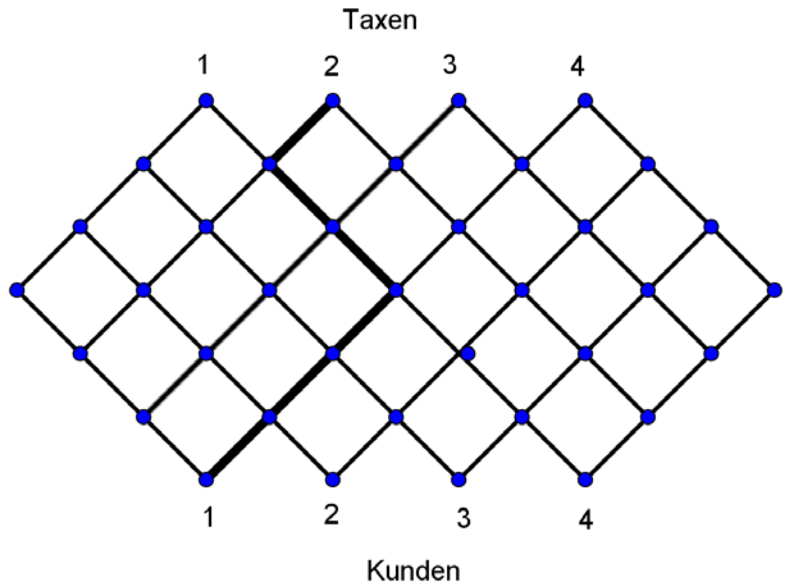




Näheres unter www.maa.org/pubs/FOCUS/Jun-Jul12_tanton.html

Ideen für Matur-Arbeiten II

Dieses Rätsel handelt von 4 Taxen, die, im Norden einer Stadt parkiert, zu 4 Kunden im Süden fahren sollen. Das Streckenmuster stellt die Strassen dar, und es wird verlangt, dass die Taxen immer nur südwärts fahren, entweder südwestlich oder südöstlich. An jeder Kreuzung kann – muss aber nicht – die jeweils andere Richtung gewählt werden. (Als Beispiel ist fett eine Route eingetragen, die Taxe 2 zum Kunden 1 bringt.)



Wir formulieren zwei Fragen, die den Antrieb für zwei abwechslungsreiche und gewinnbringende Spaziergänge in die Mathematik liefern sollen. Um die Fragen möglichst präzise formulieren zu können, führen wir noch den Begriff *Kundenbedienung (KB)* ein; darunter verstehen wir (hier) die Angabe von vier Routen, eine pro Taxe, welche entsprechend den oben beschriebenen Regeln von Norden nach Süden führen, so dass bei jedem Kunden genau eine Route endet. (Schliesslich soll ja jeder Kunde von genau einer Taxe abgeholt werden und nicht etwa von zweien oder gar keiner!) Die beiden Fragen lauten:

Frage 1:	Wie viele verschiedene Kundenbedienungen gibt es? (Zwei Kundenbedienungen heissen *verschieden*, genau dann wenn sie sich in mindestens einer Route unterscheiden.)

Frage 2:	Wie viele verschiedene Kundenbedienungen gibt es, wenn zusätzlich verlangt wird, dass sich Routen niemals kreuzen dürfen?

Die Anzahl Taxirouten von Taxi i zum Kunden j:

$$T := \left[t_{ij}\right] = \begin{bmatrix} 20 & 15 & 6 & 1 \\ 15 & 20 & 15 & 6 \\ 6 & 15 & 20 & 15 \\ 1 & 6 & 15 & 20 \end{bmatrix}.$$

Wie beantwortet man nun Frage 1? → Permanente!!! $Perm(T) = \sum_{\pi \in S_4} t_{1\pi(1)} \cdot t_{2\pi(2)} \cdot t_{3\pi(3)} \cdot t_{4\cdot\pi(4)}$

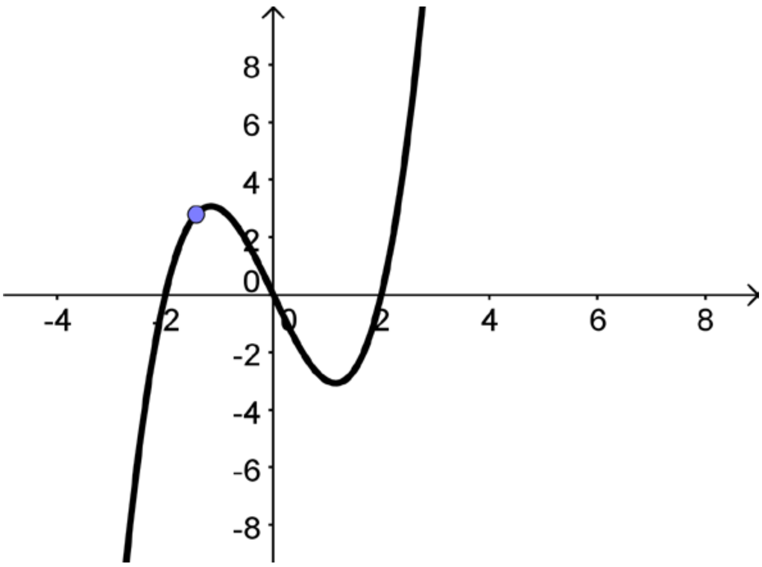
Zweite Frage sehr viel schwieriger, macht Permutationen und Determinante notwendig.

Der hier nun implizit entwickelte Satz kann leicht auf beliebige gerichtete und nicht-zyklische Graphen mit je n Ein- und Ausgängen ausgeweitet werden. Ist T diejenige Matrix, die an der Stelle (i, j) die Anzahl möglicher Pfade von Eingang i zu Ausgang j enthält, so ist immer die Anzahl der n-Pfade gleich $Perm(T)$ und die Anzahl der paarweise nicht schneidenden Pfade gleich $\det(T)$. Dieser Satz ist erst seit ungefähr 25 Jahren populär, so dass hiermit eine sicherlich willkommene Gelegenheit besteht, auch moderne Mathematik in den Unterricht einfliessen zu lassen.

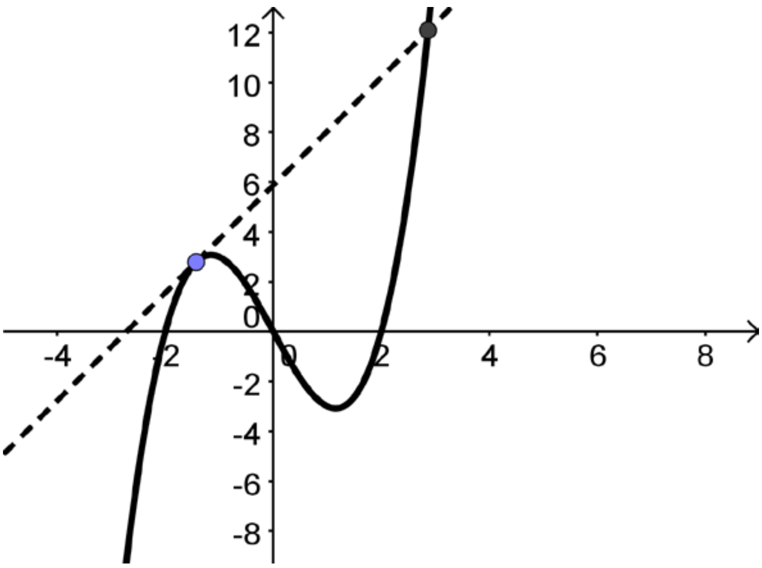
- M. Aigner, „Lattice paths and determinants”, *Computational Discrete Mathematics*, 1 – 12, Lecture Notes in Comput. Sci., no. 2122, Springer-Verlag, Berlin, 2001
- I. Gessel, G. Viennot, „Binomial determinants, paths, and hook length formulae“, *Adv. in Math.* **58** (1985), pp. 300 – 321.
- Armin P. Barth, “Taxifahren im mathematischen Verkehr”, erschienen im VSMP-Bulletin, Ausgabe Nr. 100, Februar 2006, pp.25-33

Ideen für Matur-Arbeiten III

Polynomfunktion 3. Grades. Wähle einen (fast) beliebigen Punkt $P\left(u\ ,f\left(u\right)\right)$ auf dem Graphen.

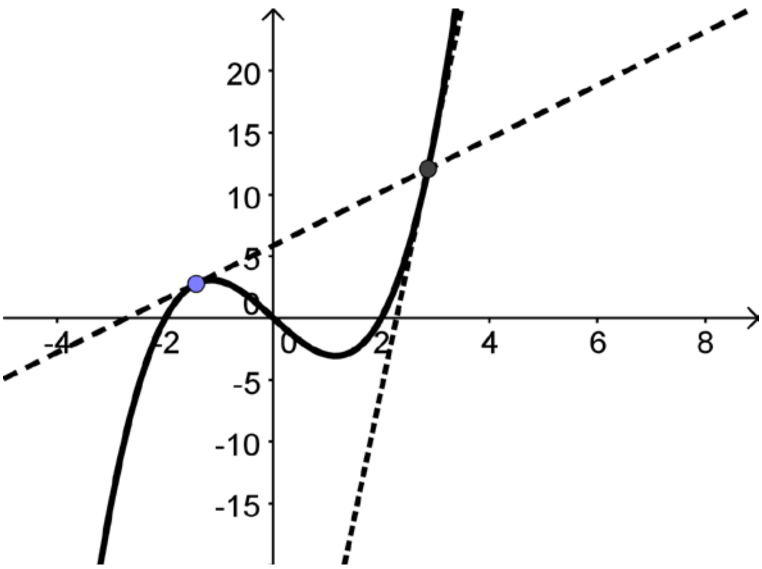


Lege Tangente an den Graphen im gewählten Punkt:

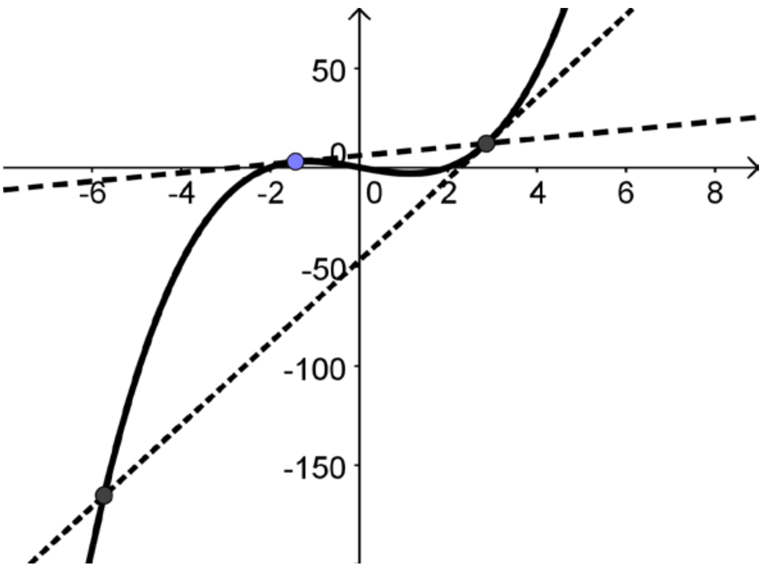


Die Tangente schneidet den Graphen sicher in einem Punkt $Q\left(v\ ,f\left(v\right)\right)$. (Warum?)

Lege Tangente an den Graphen im neuen Punkt:



Auch die neue Tangente schneidet den Graphen sicher in einem weiteren Punkt $R\left(w, f\left(w\right)\right)$



Nun sind zwei geschlossene Gebiete entstanden. Es gilt:

Satz: $\boxed{\dfrac{\left|\int_u^v t_1\left(x\right)-f\left(x\right)\,dx\right|}{\left|\int_w^v t_2\left(x\right)-f\left(x\right)\,dx\right|}=k=\text{konst.}}$

Fragen:

- k = ? Vermutung?
- Beweis?
- Verallgemeinerung?

Das war eine Frage in den *Elementen*.

Ideen für Matur-Arbeiten IV

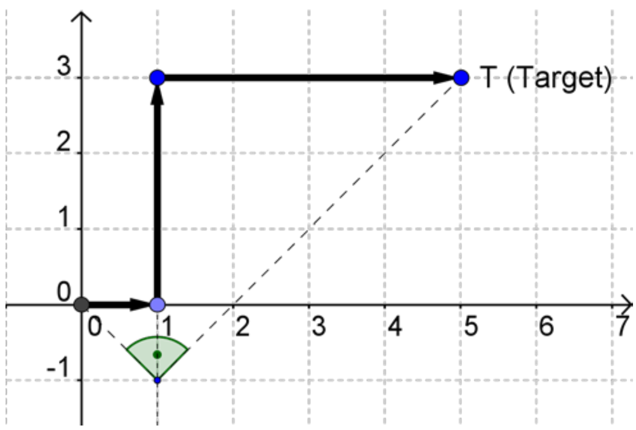
Forellen-Populationsmodell:

Manchmal greifen Forellen Jungtiere der eigenen Art an und essen sie. Wie könnte ein Populationsmodell aussehen, das einen Fischschwarm als Organismus auffasst und bei dem Kannibalismus ein Mittel ist, um die in Überzahl sich vermehrenden Jungtiere so abzuernten, dass die Biomasse der eigenen Art zugutekommt, statt dass sie andere Räuber stärkt?

Hansruedi Schneebeli, „Populationsmodelle“, VSMP – Bulletin, Nummer 119, pp. 26 - 27

Ideen für Matur-Arbeiten V

Wir lösen die Gleichung $x^2 + 3x - 4 = 0$ einmal auf sehr unkonventionelle Weise (Methode von Eduard Lill, Abb. 3): Wir stellen ein Spielzeugauto auf den Ursprung und lassen es nun 1 Einheit (der Koeffizient von x^2) in positiver x-Richtung fahren. Danach soll es 90° im Gegenuhrzeigersinn drehen und 3 Einheiten (der Koeffizient von x) weiter fahren. Zum Schluss soll es wieder 90° gegen den Uhrzeigersinn drehen und -4 Einheiten weiterfahren bis zum Endpunkt T. Nun schiessen wir vom Ursprung aus auf das Auto, aber so, dass die Kugel an der Geraden des mittleren Koeffizienten einmal reflektiert wird. Zudem herrscht hier ein sehr spezielles Reflexionsgesetz: Die Kugel reflektiert nämlich immer unter 90°. Der Winkel, unter dem wir die Kugel abschiessen, ist $-45°$. Und $-\tan(-45°) = 1$. Dies ist eine Lösung der Gleichung (was ja auch zutrifft). – Ist das ein Zufall? Lässt sich diese Methode verallgemeinern? Stimmt sie für jede Polynomgleichung 2. Grades? Und was ist mit anderen Graden?



Thomas, C. Hull, „Solving Cubics with Creases: The Work of Beloch and Lill“, The American Mathematical Monthly, Volume 118, No. 4, April 2011, pp.307 - 315

Ideen für Matur-Arbeiten VI

Warum heissen elliptische Integrale elliptisch? – Erarbeitung einer Unterrichtseinheit

Bestandteile/Hürden einer solchen Arbeit:
- Gleichung einer Ellipse verstehen, erklären, anwenden
- Definition der „elliptischen Kurve“ (etwa als Menge der Lösungen einer Gleichung der Form $E(x, y) = 0$, wobei E ein kubisches Polynom ist, wie etwa $y^2 = x^3 - 4x$ oder $y^2 = x^3 - 3x + 3$ usw.) Ellipsen sind nicht elliptische Kurven!
- Geschichtliche Aspekte
- Integralrechnung: Berechnung der Länge des Ellipsenumfangs → elliptisches Integral
- Was heisst es, dass ein Integral elliptisch ist?
- Usw.

A. Rice, E. Brown, „Why Ellipses are not elliptic curves“, in: Mathematics Magazine, Vol. 85, No. 3, June 2012, pp. 163 - 176

Ideen für Matur-Arbeiten VII – X

Ein Lehrbuch, ein Casinoführer, ein Roboter und Poker

Bericht über einige mathematische Maturitätsarbeiten

Armin P. Barth
KS Baden

«*Math class is tough!*» wussten einige sprechende Barbie-Puppen in den 90er-Jahren. Das war einer von 270 möglichen Sätzen, die damals den Puppen einprogrammiert wurden, und erst nach heftigen Protesten verzichteten die Hersteller auf diesen Satz. Dass der Satz dennoch wahr ist, wenn auch im denkbar positivsten Sinn, spüren Mathematiklehrpersonen immer wieder; sie merken es zum Beispiel daran, dass mathematische Maturitätsarbeiten relativ selten gewählt werden.

Im Sinne einer Anregung möchte ich im Folgenden über einige aus meiner Sicht besonders gelungene Arbeiten berichten, die zu betreuen ich in den vergangenen Jahren das Vergnügen hatte; es handelt sich um ein Lehrbuch, einen Casinoführer, einen sechsbeinigen Roboter und ein Lesebuch über Poker.

Mathematik – leicht verständlich

Eine Schülerin, die im Frühjahr 2011 die Maturitätsprüfung ablegte, hatte sich nicht weniger zum Ziel genommen, als den gesamten Stoff der 1. und 2. Klasse Gymnasium aufzuarbeiten und in einem Buch schülergerecht darzustellen. Ich war erst skeptisch, weil ich, ohne anmassend erscheinen zu wollen, selber sehr viel mehr darüber weiss, wie mathematische Stoffe schülergerecht aufbereitet werden können als eine Schülerin, die noch mitten im Lernprozess steht. Wozu also diese Arbeit?

Anita L., Verfasserin von „Mathematik – leicht verständlich"

Anita musste sich selber wieder in den schon länger zurückliegenden Stoff und einen möglichen, überzeugenden Aufbau einarbeiten. Sie befragte zudem Schülerinnen und Schüler nach besonderen Problemen und Lehrpersonen nach besonders herausfordernden Knackpunkten in den einzelnen Kapiteln, um diesen dann besonders viel Beachtung und Raum zu schenken. Und am Ende legte sie ein 155 Seiten starkes Buch vor, das die einzelnen Kapitel übersichtlich und gut illustriert behandelt und das mit Beispielen, Tipps, Taschenrechnerhinweisen, Querbezügen, einem Stichwortverzeichnis und einer ausführlichen Formelsammlung ausgestattet ist. Meine anfängliche Skepsis war verflogen: Als Ergänzung zum Unterricht halte ich das Werk für sehr wertvoll; gerade für Schülerinnen und Schüler, die nicht mit einem Buch oder Skript arbeiten, bietet das Werk die Möglichkeit nachzulesen, zu vertiefen, alles noch einmal aus einem anderen Blickwinkel zu beleuchten.

Die Werbung an meiner Schule und den anderen kantonalen Schulen lief gut an, und Anita verkaufte gleich nach Fertigstellung des Buches deutlich mehr Exemplare als erhofft. Das Buch wurde von einer Schülerin und für Schülerinnen und Schüler geschrieben, ein Unternehmen, das trotz meiner anfänglichen Skepsis zu einem hervorragenden Ergebnis geführt hat.

Glücksspiele und ihre Gewinnchancen

Zwei meiner ehemaligen Schüler waren begeisterte Spieler. Ob Roulette, Black Jack oder Poker, die Spiele und vor allem ihre mathematischen Analysen faszinierten Martin M. und Martin H.

Daher beschlossen sie, einen mathematischen Casinoführer zu schreiben, der den Benutzern eine Hilfestellung sein soll bei dem Besuch eines Casinos. Nicht zuletzt dank der Unterstützung des Casinos Baden gelang ihnen eine besonders schön illustrierte Arbeit, in der Lotto, Toto, Keno, Roulette, Bingo, Poker und Black Jack vorgestellt und mit kombinatorischen und wahrscheinlichkeitstheoretischen Methoden analysiert wurden.

Eine Maschine lernt laufen

Das Ziel einer älteren Arbeit war, einen sechsbeinigen Roboter zu entwickeln, der sich selbständig fortbewegt; Bewegung und Koordination seiner Beine sollten mit Hilfe eines neuronalen Netzwerks trainiert werden. Thomas B., mein Schüler, las sich ein in bedeutende Vorarbeiten auf dem Gebiet der Laufmaschinenentwicklung, die damals vor allem an deutschen Universitäten geleistet worden sind. Dank dieser Vorarbeiten konnte er sich relativ schnell für die Grundstruktur (Abmessungen, Antriebsart, ungefähre Steuerstruktur) des Roboters entscheiden. Die Konstruktion der Beine machte detaillierte Berechnungen nötig. Zur Steuerung des Roboters waren einerseits genaue Kenntnisse der Elektronik und andererseits detaillierte Kenntnisse moderner Trainingsalgorithmen, insbesondere diverser neuronaler Netzwerke, nötig. Der auf *Error-Backpropagation* beruhende Netzwerkalgorithmus ist von hoher mathematischer Komplexität.

$$\frac{\delta E_{tot}}{\delta w_{IJ}^{l-1,l}} = -\sum_{i_1=1}^{n_o} \left\{ \left(d_{i_1} - a_{i_1}^{o} \right) \cdot \sigma' \left(x_{i_1}^{o} \right) \cdot \sum_{i_2=1}^{n_{o-1}} \left\{ w_{i_2,i_1}^{o-1,o} \cdot \sigma' \left(x_{i_2}^{o-1} \right) \cdot \sum_{i_3=1}^{n_{o-2}} \left[w_{i_3,i_2}^{o-2,o-1} \cdot \sigma' \left(x_{i_3}^{o-2} \right) \cdot \frac{\delta x_{i_3}^{o-2}}{\delta w_{IJ}^{l-1,l}} \right] \right\} \right\}$$

Dass Thomas mit Formeln wie der abgebildeten umzugehen verstand, ist alles andere als selbstverständlich. Dank über 400 Stunden Arbeitsaufwand und nie nachlassendem Eifer gelang ihm eine Arbeit, die Lichtjahre über dem Standard durchschnittlicher Maturitätsarbeiten liegt – eine Qualität, die nur erreicht werden kann, wenn sich jemand mit Haut und Haar einer Aufgabe verschreibt. Dann aber sind Jugendliche zu Leistungen imstande, die sich auf einem geradezu schockierend hohen Niveau bewegen – schockierend, wenn man damit das fachliche Niveau kontrastiert, das im „Normalunterricht“ durchschnittlich erreicht wird.

Ein Roman über Poker

Vor einigen Jahren haben Peter Gritzmann und René Brandenberg mit «*Das Geheimnis des kürzesten Weges*» einen ganz hervorragenden Roman über Graphentheorie geschrieben, der sich sehr direkt an Jugendliche wendet. Angetan von der Idee, dass man mit wirklich gut geschriebenen, stufengerechten, humorvollen Texten Jugendliche sicherlich für Mathematik begeistern kann, schlug ich kürzlich das Thema vor, Poker, Kombinatorik und Wahrscheinlichkeitsrechnung in eine Art Jugendroman zu verpacken. Ich wollte gewissermassen das Gegenteil eines trockenen Lehrbuches, eine Geschichte, die sich in der Welt der Jugendlichen abspielt und bei der sich alles um Poker dreht und Mathematik nicht deshalb vorkommt, weil ein Lehrplan es vorschreibt, sondern weil es das am besten geeignete Werkzeug ist, um die anfallenden Probleme zu lösen.

Glücklicherweise haben zwei meiner Schüler, Nikita K. und Alain S., angebissen und entwickeln nun ein Buch und eine Website. Die ersten Ergebnisse sind sehr erfreulich: Die Geschichte handelt von Jugendlichen, die sich zu einem Pokerabend treffen und mehr über dieses Spiel lernen wollen, und in ganz ungekünstelter Weise treten Fragen um reale Spielsituationen auf, die nur mit einer cleveren Portion Mathematik beantwortet werden können…

Fragwürdige Beispiele:

Themenvorschläge an der KS Trogen / KS Romanshorn

- Das Pascalsche Dreieck
- Primzahlen
- Jost Bürgi
- Newton und Leibniz als Erfinder der Differentialrechnung
- Das Unendliche in der Mathematik
- Die Zahl pi
- Gruppentheorie
- Usw.

Das sind keine spannenden Fragen. Zudem existieren zu allen Themen unzählige Aufsätze, Artikel und Bücher, teils überaus brillant. Die Gefahr des „Zusammenklebens" diverser online erhältlicher Texte ist enorm. Die Themen werden dann aber doch kaum gewählt, weil sie kaum spannende Herausforderungen versprechen.

Ein Zitat: „Vielleicht reizt es dich, ein anspruchsvolles Spiel zu programmieren. Achtung: Gibt viel Arbeit!"

Schon besser: KS Kirchenfeld (BE):

Nicht: „Die Zahl pi", sondern: „Verschiedene Berechnungsmethoden für die Zahl pi"
Nicht: „Komplexe Zahlen", sondern: „Anwendung komplexe Zahlen für die Beschreibung geometrischer Abbildungen"
Usw.

Aber dann:

„Wissenschaftlich bedeutet, systemisch nach Wahrheit zu suchen und die gefundenen Resultate nachvollziehbar präsentieren."

„Fassen Sie sich kurz! Ihre Arbeit sollte 15 A4-Seiten nicht überschreiten. (…) Schreiben Sie kurze Sätze! (…) Schreiben Sie positiv. (…) Meiden Sie das Passiv und den Konjunktiv ebenso."

Massnahmen zur Förderung des Faches Mathematik als Disziplin für Matur-Arbeiten ???

a) <u>Frühe kognitive Aktivierung durch z.B. Känguru-Aufgaben</u>

1) Welche der folgenden sechsstelligen Zahlen ist stets durch 7 teilbar, egal, welche Ziffern man für P und Q (aber Q ungleich 0) einsetzt?

(A) QQPPQP (B) QPQPQP (C) QPQQPP (D) QPPQQP (E) QQQPPP

---

2) Wenn $x^2 + y^2 = 2xy$ gilt und y nicht gleich 0 ist, dann ist $\frac{x}{y} =$

(A) 4 (B) 2 (C) 1 (D) -1 (E) -2

---

3) Wenn $x + y + z = 1$ ist und $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ ist, dann ist $xy + yz + zx =$

(A) -2 (B) -1 (C) 0 (D) 1 (E) 2

---

4)
Josef hat 100 Mäuse, einige davon sind weiss, der Rest ist grau. Mindestens eine Maus ist grau, und unter beliebig herausgegriffenen 7 Mäusen sind stets mindestens 4 Mäuse weiss. Wie viele der 100 Mäuse sind folglich höchstens grau?

(A) 1 (B) 3 (C) 4 (D) 93 (E) 99

---

5) Ich habe drei Würfel gleichzeitig geworfen und dann die Augenzahlen aller drei Würfel addiert. Wie viele verschiedene Werte sind für diese Summe möglich?

(A) 18 (B) 17 (C) 16 (D) 15 (E) 14

---

6) Im Sportlager wollen 10 der Teilnehmer Handball spielen. Wie viele verschiedene Möglichkeiten, 2 Mannschaften mit je 5 Spielern zu bilden, gibt es, wenn Thomas in derselben Mannschaft wie Jannik, und Eva in einer anderen Mannschaft als Peter spielen will?

(A) 15 (B) 30 (C) 50 (D) 56 (E) 210

---

7) Ich habe 2 Kreise und 3 Geraden gezeichnet und alle Schnittpunkte farbig markiert. Wie viele können das höchstens sein?

(A) 11 (B) 14 (C) 16 (D) 17 (E) 22

---

8)
Wie viele Quadrate lassen sich auf einem gewöhnlichen Schachbrett finden?

(A) 1 (B) 8 (C) 64 (D) 64^2 (E) etwas anderes

---

b) <u>Frühe individuelle Förderung mit Aufgaben im Stil der Mathematik-Olympiaden</u>

Grüezi Herr Barth

Ich habe jetzt mal alle Aufgaben zum Taubenschlag- und Invarianzprinzip gelöst. Falls Sie Lust haben, wäre es nett, wenn Sie kurz einen Blick auf die Dokumente werfen könnten.
Also bei den "Pythagoras-Sachen", habe ich einfach nicht herausgefunden, wie man den Peripheriewinkelsatz beweisen kann.

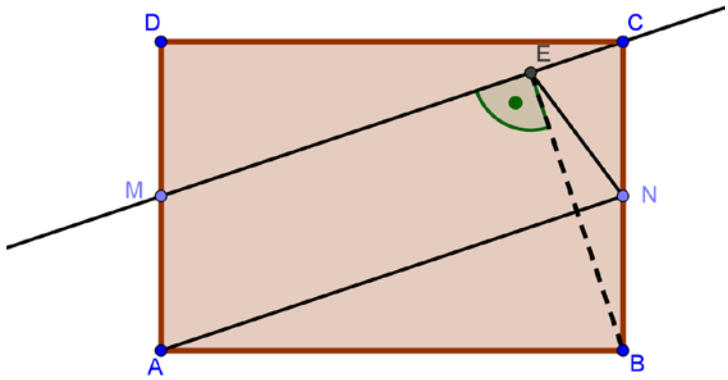
Danke schon im Voraus und ich wünsche Ihnen noch weiterhin schöne und erholsame Ferien.

Ich habe übrigens noch mit Niko und Oliver gesprochen, und auch sie finden, dass das eine gute Möglichkeit wäre. Sie sind also sicher auch an Bord.

Lieber Gruss,

Jonathan

Aus der SMO-Vorrunde, 2005:



Sei *ABCD* ein Rechteck mit $\overline{AD} \leq \overline{AB}$. Sei *M* der Mittelpunkt der Strecke *AD* und *N* der Mittelpunkt der Strecke *BC*. Der Punkt *E* sei die Projektion von *B* auf die Gerade *CM*.

a) Beweisen Sie, dass *ANEM* ein gleichschenkliges Trapez ist.
b) Beweisen Sie, dass die Fläche des Vierecks *ABNE* halb so gross ist wie die Fläche von *ABCD*.

Aus der SMO-Vorrunde, 2005:

Zeigen Sie, dass es in jedem konvexen 9-Eck zwei verschiedene Diagonalen gibt, so dass die beiden Geraden, auf denen diese Diagonalen liegen, entweder parallel sind oder aber sich in einem Winkel von weniger als 7° schneiden.

www.smo.ch

c) Frühe individuelle Förderung mit Zusatzlektüre

- Charles T. Salkind, „The Contest Problem Book – Annual High School Mathematics Examinations“, The MAA,
- J. Douglas Faires, “First Steps For Math Olympians”, The MAA
- Titu Andreescu, Zuming Feng (Ed.), “Mathematical Olympiads – Problems and Solutions from around the world”, The MAA
- Usw.

d) “And the Leo goes to…”

Eventuell periodischer schulinterner Wettbewerb in Mathematik, Die Knacknuss des Monats o.ä. mit einem attraktiven Preis und einer Statuette („Leo“)

e) Anregungen und konkrete Vorschläge im Unterricht

Die Lehr- und Lernforschung
– 13 Irrtümer zum Thema Lehren und Lernen

Es gibt zahlreiche immer weiter tradierte Aussagen, die sich in den Köpfen der Menschen einnisten und von denen man glaubt, sie wären richtig bloss, weil sie schon so lange herumgeistern. Beispiel: Aufgewärmter Spinat ist giftig. Untersuchungen haben aber gezeigt: Das im Spinat enthaltene Nitrat kann sich ins gefährlichere Nitrit umwandeln, allerdings nur beim warm aufbewahrten Spinat. Kühl aufbewahrten Spinat kann man getrost aufwärmen.

(Bei der Messung 48 Stunden nach dem ersten Kochen und zweimaligem Erwärmen steigt der Nitritgehalt des Spinats sprunghaft an – etwa auf 0.4 Gramm pro Kilogramm. Ein Säugling könnte sich daran tatsächlich vergiften. Doch dieser Wert gilt nur für den warm gelagerten Spinat. Der kühl gelagerte Spinat bleibt selbst zwei Tage nach dem ersten Kochen genießbar – zumindest, was den Nitritgehalt angeht. Im kühl gelagerten Spinat bleibt der Nitritgehalt so niedrig wie am Tag zuvor. Diese Menge wäre wahrscheinlich auch für Säuglinge tolerierbar.)

1. Kleinere Klassengrössen verbessern das Lernen

Man hört immer wieder, dass Schülerleistungen verbessert werden könnten, wenn man nur die Klassengrösse verringern würde. Politikerinnen und Politiker halten dagegen, dass dies aus finanziellen Gründen eben nicht machbar ist. In den letzten Jahren sind mehrere Untersuchungen zu diesem Thema durchgeführt worden und haben zu einem eigentlich nicht besonders erstaunlichen Befund geführt:

> *„Für diese Annahme (dass eine Verringerung der Klassengrösse eine effiziente Methode zur Verbesserung der Schülerleistungen ist) gibt es jedoch keine empirische Evidenz, das heisst es findet sich kein Zusammenhang zwischen Klassengrösse und Lernfortschritt. Erklärt wird dieses Ergebnis damit, dass in der Schule vorwiegend Unterrichtsmethoden eingesetzt werden, bei denen die Vorteile einer kleineren Klasse nicht zum Tragen kommen“.*

(E. Stern e.a. *Erziehungs- und Schulpsychologie*, in: K. Pawlik (Hrsg.), *Handbuch Psychologie*, Springer, Heidelberg, 2006)

2. Es gibt gute und schlechte Methoden

Besonders in den letzten Jahrzehnten wurde der Frontalunterricht zunehmend verteufelt, und Forderungen wurden laut, endlich moderne, stark individualisierende Unterrichtsformen einzusetzen. Man versprach sich davon die ersehnten besseren Schülerleistungen. Bände wurden angefüllt mit ausgeklügelten Methoden, die – so das oft gehörte Versprechen – auf alle Fälle gelingen, wenn man sie nur peinlich genau umsetzt. Dagegen kann man heute einwenden: Es gibt nicht grundsätzlich gute und grundsätzlich schlechte Methoden. Es macht einen guten Lehrer aus, wenn er in der Lage ist, aus einem Fundus bewährter Methoden jederzeit diejenige auszuwählen, die der jeweiligen Unterrichtssituation optimal angepasst ist.

> *„Als ein weiteres zentrales Ergebnis der Unterrichtsforschung bleibt festzuhalten, dass die Suche nach der einzig angemessenen Unterrichtsform nicht sinnvoll ist. Frontalunterricht ist nicht per se besser oder schlechter als Gruppenunterricht oder offener Unterricht. Die grösseren Lernerfolge sind vielmehr in Klassen zu beobachten, in denen eine Vielfalt verschiedener Lernmethoden angeboten und an die Inhalte angepasst wird. Guter Unterricht ist auf vielfältige, aber nicht auf beliebige Weise zu realisieren. Die grösste Herausforderung für gute Lehrer besteht darin, einerseits der Tatsache Rechnung zu tragen, dass Lernen stets ein aktiver Konstruktionsprozess ist, bei dem die Lernenden ihr bestehendes Wissen auf der Grundlage eingehender Informationen aktiv verändern, und andererseits im rechten Moment Hilfestellungen anzubieten*“.

(E. Stern e.a. *Erziehungs- und Schulpsychologie*, in: K. Pawlik (Hrsg.), *Handbuch Psychologie*, Springer, Heidelberg, 2006
Und: sinngemäss zitiert aus A. P. Barth, *Ereignis Unterricht – Auf dem Weg zur guten Lektion*, Klett Verlag, Zug, 2007)

3. Es gibt Menschen mit gutem und solche mit schlechtem Gedächtnis

Im Alltag hört man immer wieder, jemand habe ein schlechtes oder ein besonders gutes Gedächtnis. Gibt es solche grundsätzlichen Unterschiede in der Gedächtniskapazität?

> *„Im Alltag spricht man zwar von einem guten oder schlechten Gedächtnis häufig wie von einer Persönlichkeitseigenschaft – der eine hat es, der andere eben nicht. Tatsächlich zeigen sich aber Einschränkungen in der generellen Gedächtnisleistung nur als Folge von kortikalen Störungen. Ansonsten hängt es vor allem von der zur Verfügung stehenden Wissensrepräsentation ab, im welchem Umfang man sich Information merken kann“.*

(Elsbeth Stern e.a., *Lernziel: Intelligentes Wissen*, Universitas 2/2004, pp. 121 – 134)

Ein ganz simples Beispiel: Ich kann mir die Ziffernfolge 31415926535 ganz schlecht einprägen, selbst wenn ich weiss, dass es die ersten elf Ziffern der Kreiszahl *pi* sind. Wenn ich aber eine andere Wissensrepräsentation wähle, wenn ich mir stattdessen den (mehr oder weniger) sinnvollen Satz „*May I have a large container of coffee, sugar and cream?*“ merke, werde ich die Ziffernfolge nie vergessen; die Ziffern entsprechen einfach der Buchstabenanzahl der einzelnen Wörter dieses englischen Satzes.

4. Der Irrtum vom prinzipiellen Vorteil multimedialen Unterrichts

Man hört und liest immer wieder, dass grosse Hoffnungen auf computeranimierte Lernumgebungen gesetzt werden. Seit einigen Jahren bricht eine wahre Flut von animierten Stoffeinheiten über uns herein, es gibt tanzende Atome und fliegende Moleküle und vieles mehr. *Richard Mayer* von der University of California und andere haben kürzlich intensive Untersuchungen darüber durchgeführt - mit einem durchwegs niederschmetternden Ergebnis: <u>Niemals</u> war eine computeranimierte Umgebung einer statischen überlegen. Oftmals war der Lernzuwachs in animierten Umgebungen sogar geringer als in Lernumgebungen mit statischen Bildern. Zudem herrscht die grosse Gefahr, dass neue Fehlkonzepte entstehen wie zum Beispiel, dass Strom wie Wasser in einer Röhre fliesst, was – physikalisch gesehen – Unsinn ist.

Eine mögliche Erklärung hierfür könnte die beim Menschen suboptimal ausgeprägte Fähigkeit sein, Bewegungen in der Erinnerung zu speichern. Eine andere kann sein, dass Menschen beim Erfassen von Bewegungen *eher alert reagieren als nachdenklich*. Das hatte in der Urgeschichte des Menschen den durchaus positiven Effekt, dass man bei Gefahr, die ja in den meisten Fällen als eine schnelle Bewegung erschien, schneller fliehen konnte.

(sinngemäss nach R. E. Mayer, *Multimedia Learning*, Cambridge University Press, New York, 2001)

5. Der Irrtum vom prinzipiellen Vorteil der Frühförderung

Es vergeht kein Tag, ohne dass irgendjemand fordert, man müsse Kinder in möglichst frühen Jahren mit möglichst vielen Unterrichtsstoffen konfrontieren. Das Gehirn sei dann besonders aufnahmefähig, heisst es etwa, und verpasste Gelegenheiten könne man später nie mehr kompensieren. Das junge Gehirn sei wie ein Schwamm, sagen andere, das mühelos alles aufsauge, was man ihm darböte.

Das, meine Damen und Herren, ist blanker Unsinn. Das Gehirn ist zu keiner Altersstufe mit einem Schwamm vergleichbar. Dieses Bild ist falsch und irreführend. Das kindliche Gehirn hat noch grosse Defizite in der Handlungs- und Planungskompetenz, und es filtert Input-Reize noch sehr stark. Das zeigt sich schon darin, dass das Kleinkind erst nur Einwort-, dann Zweiwortsätze usw. bildet, obwohl es in seiner Umgebung mit sehr komplexen Sätzen konfrontiert ist. Zudem: Vermeintliche Frühförderungen wie etwa Frühenglisch an Primarschulen ist heikel, weil Kinder im entsprechenden Alter noch zu wenig von Sprache verstehen. Die entscheidende Frage ist ja immer, ob das nötige Vorwissen vorhanden ist, an dem sich relativ mühelos anknüpfen lässt. Im Primarschulalter wissen die Kinder aber noch fast nichts über Wortarten und Satzbau, um den Spracherwerb effizient vorantreiben zu können. Darum können sich Jugendliche ohne Frühenglisch immer sehr schnell auf den gleichen Stand bringen wie solche mit Frühenglisch. Und es gibt bis heute auch noch keine seriös gemachte und prominent publizierte Studie, die Vorteile von Frühenglisch hätte nachweisen können.

Auch die Vorstellung, wonach Kinder fast mühelos schaffen, was für Erwachsene fast unmöglich ist, ist falsch. Beispielsweise gibt es bis heute keinen Beleg dafür, dass Kinder von Fremdsprachenunterricht mehr profitieren als Erwachsene, dies aber natürlich auch deswegen, weil in unseren westlichen Kulturen Kinder und Erwachsene eine Sprache ganz unterschiedlich lernen. (Das heisst, man muss unterscheiden, ob man die Sprache artifiziell lernt oder ganz beiläufig, wenn man etwa zweisprachig aufwächst!)

(sinngemäss nach E. Stern, *Psychologie heute compact: Schule verändern*, Heft 16, 2007, p.21-25 - und: E. Stern, *Auf falschen Fährten*, Frankfurter Rundschau, 30.9.2003 - und: E. Stern, *Wissen ist der Schlüssel zum Können*, Psychologie Heute, Juli 2003 - und E. Stern, *Völlig überschätzt*, Interview in HEUREKA 3/2005, Kinder und Wissenschaft)

6. Lernende dürfen nichts Falsches sehen.

Oft hört man in Lehrerkreisen, man dürfe nichts Falsches anschreiben, die Schüler nicht mit falschen Sachverhalten konfrontieren. Einer meiner eigenen Lehrerkollegen behauptete kürzlich, dass die Schüler sich den Fehler gerade dann aneignen, wenn man ihnen falsche Dinge zeige.(Es ging um die Wurzelgesetze.)

Nichts könnte falscher sein. Schülerinnen und Schüler lernen sogar besonders viel, wenn man sie dazu anhält, Fehler als solche zu entlarven. In einer neuen Studie konnte gezeigt werden, dass Auseinandersetzungen mit Falschem nicht zu falschem Denken führen muss und dass Lernenden, die das regelmässig tun, sogar deutlich davon profitieren können.

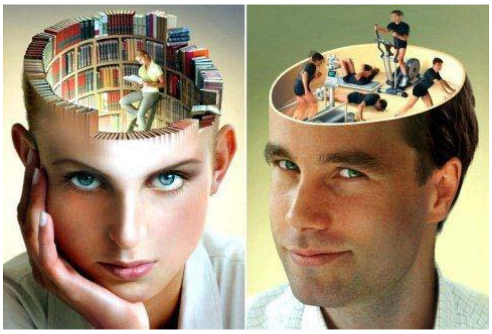
Autoren: Kelley Durkin, Bethany Rittle-Johnson, Vanderbilt University Nashville
Versuchsgruppe: 100 SuS der 4. und 5.Primarstufe (2 Gruppen)
Thematik: Typische Fehler im Zusammenhang mit Dezimalzahlen
z.B. 0.25 > 0.7, weil 25 > 7
z.B. Misskonzept um 0: 0.08 = 0.8
z.B. Alle Dezimalzahlen werden als < 0 angesehen
Vorgehen: Gruppe 1 wurde mit korrekten und falschen Lösungen konfrontiert und aufgefordert zu erklären, welche Lösung falsch ist und weshalb. Gruppe 2 lernte nur aus korrekten Beispielen.

Fazit: Vergleiche von falschen und richtigen Lösungen führen zu einem höheren Lernerfolg.

(Kelley Durkin, Bethany Rittle-Johnson, „The effectiveness of using incorrect examples to support learning about decimal magnitude“ in: Learning and Instruction 22 (2012), pp. 206 – 214)

7. Man kann das Gehirn wie einen Muskel trainieren

Mensch muss heute nicht mehr durch Wälder streifen, um was Essbares zu jagen, er sitzt mehrheitlich an Bürotischen und S-Bahnen rum und bewegt sich zu wenig.
➔ Jogging erfunden und andere Sportarten.



Idee: Durch sportliche Betätigung fast jeder Art kann man den Körper unspezifisch so trainieren, dass danach Herz und Kreislauf stark sind oder bleiben. So etwas hätte der Mensch auch gern für den Kopf. Seit Jahrzehnten geistert die Idee der *formalen Bildung* durch Schulstuben und Büros von Bildungspolitikern: Danach ist es möglich, den Intellekt zu schulen, wenn man sich mit möglichst komplexen und abstrakten Aufgaben beschäftigt, egal, welchen Inhalts.

➔ Logikrätsel, Kreuzworträtsel, Sudokus, Bimarus, Gehirnjogging aller Art.

Aber:

Heute weiss man, dass diese Vorstellung ganz falsch ist. Der Mensch lernt immer nur im Zusammenhang mit Inhalten, und dann lernt er genau das, wovon diese Inhalte handeln. Will man beispielsweise lernen, wie ein Motor funktioniert, muss man die dazu nötigen technischen und physikalischen Inhalte studieren. Will man lernen, Texte zu schreiben, muss man Texte schreiben. Will man seine Kompetenzen beim Lösen mathematischer Aufgaben verbessern, muss man mathematische Aufgaben lösen. Man kann dann nicht *irgendwas* tun, um sich zu verbessern. Wer umgekehrt viele logische Denkaufgaben löst, lernt nichts ausser eben: logische Denkaufgaben eines bestimmten Typs zu lösen. Man kann seinen Geist also nicht *unspezifisch* trainieren, sondern immer nur im Zusammenhang mit Inhalten. Darum ist es auch, obwohl das einige Schulen machen, unsinnig, etwa die Projektmethode in einem theoretischen Vorkurs, also ohne konkretes inhaltliches Projekt, zu üben.

„Die Vorstellung, man könne sein Gehirn wie einen Muskel trainieren, ist also genauso absurd wie jene, unsere Texte würden besser werden, wenn wir uns einen leistungsfähigeren Computer zulegten. Wer bessere Texte schreiben will, muss an der Sprache feilen und an der Argumentationslogik arbeiten. Die Technik spielt dabei keine Rolle."

(E. Stern, *Psychologie heute compact: Schule verändern*, Heft 16, 2007, p.21-25 u.a.)

„*Es ist nicht möglich, Menschen unspezifisch darin zu trainieren, besser zu denken, sondern man kann sie lediglich beim Erwerb und der Anwendung von Wissen unterstützen."*

(E. Stern e.a., Lernziel: Intelligentes Wissen, Universitas 2/2004)

„*Eigenständige Methodentrainings sind so sinnvoll wie Stricken ohne Wolle. Wer Lehrern weismacht, es komme nur auf die Methoden an, vermittelt ihnen eine Pseudosicherheit und lenkt sie ab von ihrem Kerngeschäft, nämlich der Vermittlung von Inhalten.*"

(E. Stern, Inhalt statt Methode, in: DIE ZEIT, 17/2006)

„Gegenargument": Durch Gehirnjogging bilden sich im Gehirn neue Synapsen-Verbindungen aus, von denen wir auch sonst profitieren. Aber: Das stimmt zwar, es bilden sich aber auch neue Synapsen-Verbindungen, wenn wir gehäuft Pornofilme schauen oder wenn wir uns gehäuft in Einbruchtechniken üben. Das Gehirn muss nicht erst fürs Lernen fit gemacht werden, es ist das schon.

Umgekehrt ist es auch fast immer falsch, wenn man Lernschwierigkeiten oder schulischen Misserfolg mit dem Gehirn zu erklären versucht. Das wäre etwas so, als würde man den Tod eines miserablen Autofahrers, der gegen einen Baum raste, mit der Krafteinwirkung des Baums erklären. Falsch ist das ja nicht, aber es erklärt nicht, wieso andere Autos nicht gegen den Baum knallen.

8. Sozial- und Lernkompetenzen kann man unabhängig von Inhalten erlernen

> *"Einigen von Ihnen wird jetzt vielleicht der Modebegriff der Schlüsselqualifikation einfallen. (...) Der unbedachte Umgang mit dem Begriff „Schlüsselqualifikation" birgt aber noch eine viel grössere Gefahr in sich, nämlich die damit einhergehende Annahme, Sozial- und Lernkompetenzen liessen sich unabhängig vom Inhalt vermitteln. Nichts ist falscher als das. Leider haben mir Berliner Schüler schon von solchen Auswüchsen erzählt: In der ersten Woche nach den Ferien wurden in jedem Fach nur Lernstrategien vermittelt, bevor es „richtig" losgehen sollte. Tatsächlich sind Lernstrategien oder Sozialkompetenzen zwar lernbar, aber nicht direkt lehrbar. In einer erfolgreichen Lernumgebung fallen sie als höchst brauchbare Nebenprodukte ab. Man sollte als Lehrer durchaus Gruppenunterricht machen und die Schüler zum systematischen Lernen und Lesen anhalten – aber eben nur im Zusammenhang mit der erfolgreichen Vermittlung von Inhalten".*

(Elsbeth Stern, *Lernen – der wichtigste Hebel der geistigen Entwicklung*, Universitas 5/2003)

9. Man kann das Arbeitsgedächtnis trainieren, und das führt auch zu höherer geistiger Fitness.

   Arbeitsgedächtnis – „Definition": „A brain system that provides temporary storage and manipulation of the information necessary for … complex cognitive tasks" (A. Baddely, „Working memory", in: Science, 255, pp. 556 – 559, 1992)

   Working memory training programs: CogMed, Jungle Memory, Cognifit, usw.

   Es wird z.B. behauptet, dass Jungle Memory den IQ und die Noten steigern kann. Das basiert wohl auf der naiven Vorstellung, dass durch wiederholtes „Hochladen" grösser werdender Informationsmengen ins Hirn die Kapazität sich nachhaltig steigern lässt und dass das Transfereffekte zu anderen kognitiven Leistungsbereichen hat.

   Fazit:

   „There is no evidence that working memory training produces generalized gains to the other skills that have been investigated (verbal ability, word decoding, arithmetic), even when assessments take place immediately after training. (…) Our meta-analyses show clearly that these training programs give only near-transfer effects, and there is no convincing evidence that even such near-transfer effects are durable."

   (Monica Melby-Lervag, Charles Hulme, „Is working memory training effective? A meta-analytic review", in: Developmental Psychology, Advance online publication, May 21, 2012)

10. Mathematik und / oder Latein fördern das logische Denken

    > *„Die Auffassung, dass wir unseren Intellekt am besten an möglichst komplexen und abstrakten Problemen schulen, unabhängig vom Inhalt, ist falsch. Dahinter steckt häufig die Annahme, dass eine Aufgabe auf ihre abstrakte Struktur reduziert wird, welche dann auf neue Probleme übertragen werden kann. Diese Art von Wissenstransfer – das zeigen zahlreiche Studien – bleibt jedoch in der Regel aus. Wenn man möchte, dass Schüler verstehen, warum ein Auto fährt, müssen sie physikalische Gesetzmässigkeiten verstehen. Wenn ich lernen will, Texte zu lesen und zu verstehen, dann muss ich eben anspruchsvolle Texte lesen und interpretieren. Da kann ich nicht irgendwas machen. Latein ist auch ein gutes Beispiel: Dem Lateinlernen wurde immer ein geheimnisvolles Gehirntraining nachgesagt. Unsere Studien haben aber ergeben, dass es nicht etwa das logische Denken fördert. Es fördert das, was es zum Inhalt hat, etwa das genaue Achten auf grammatische Strukturen. Wir müssen uns von der Vorstellung lösen, dass unser Gehirn mit beliebigen geistigen Aktivitäten trainiert werden kann*".

    (Elsbeth Stern, *Lernen – der wichtigste Hebel der geistigen Entwicklung*, Universitas 5/2003)

11. Gelerntes lässt sich leicht durch Transfer auf andere Inhaltsgebiete übertragen.

Sehr stark verwandt mit den obigen Punkten ist die Frage, ob es möglich ist, in einem Fach erworbenes Wissen leicht auf ein anderes Fach zu übertragen. An Schulen ist man ja vor allem an *distalem (*weitem*) Transfer* interessiert, weil bei diesem der Grad an Unähnlichkeit zwischen ursprünglicher Lernsituation und Transfersituation relativ gross ist. Mancher Physiklehrer ärgert sich darüber, dass Schülerinnen und Schüler sich bei ihm so verhalten, als hätten sie noch nie eine Lektion Mathematik gehabt, und nicht wenige Sprachlehrer erhoffen sich Transferleitungen von einer Sprache in eine andere. Leider ist das nicht so einfach:

> *„Die Forschung der vergangenen Jahrzehnte hat gezeigt, dass menschliche Kognition weitaus situations- und anforderungsspezifischer ist, als dies lange Zeit in Theorien der Informationsverarbeitung angenommen wurde. Aufgaben aus unterschiedlichen Inhaltsgebieten können sich trotz isomorpher Struktur deutlich in ihrer Schwierigkeit unterscheiden, und die beim Lösen bestimmter Aufgaben erworbenen Strategien werden nur selten spontan auf neue Aufgaben ähnlicher oder gleicher Struktur übertragen. Die Ergebnisse der Forschung zur Expertise gehen in eine ähnliche Richtung: Menschen, die in einem bestimmten Bereich Höchstleistungen erbringen, erweisen sich in anderen – teilweise sogar angrenzenden – Bereichen als lediglich durchschnittlich. (...) Auch andere Experimente zeigen, dass es zur Übertragung bekannter Lösungsstrategien auf neue Inhaltsbereiche nur dann kommt, wenn bei der Transferaufgabe die gleichen Wissenselemente genutzt werden können wie bei den Aufgaben, mit denen diese Strategien eingeübt wurden. Es gehört mittlerweile zu den am häufigsten replizierten Befunden in der kognitiven Psychologie, dass der Lerntransfer ausbleibt, wenn diese Übereinstimmung der Wissenselemente fehlt. Ungeachtet dieser empirischen Befunde beeinflusst jedoch die Idee der formalen Bildung, die auf der Vorstellung vom unspezifischen Lerntransfer beruht, weiterhin unsere Schulkultur“ .*

(Diverse Autoren: *Transfer*, in: D. H. Rost (Hrsg.), *Handwörterbuch: Pädagogische Psychologie*, Beltz-Verlag, Weinheim, 2006)

Beispiel: Nach oben geworfene Masse

Oftmals fluchen Lehrpersonen über Jugendliche, die es nicht schaffen, einen Transfer von einem Fach auf ein anderes zu leisten. Der amerikanische Psychologe Edward L. Thorndike hat schon vor über 100 Jahren in Experimenten gezeigt, dass die Möglichkeit solchen distalen Transfers mindestens in Zweifel gezogen werden muss. Heute weiss man, dass der in der Schule angestrebte Transfer nur gelingt, wenn die neue Aufgabe auf dieselben Wissenselemente zurückgreift wie die alte und wenn diese gemeinsame Wissensbasis deutlich herausgearbeitet wird. Beispielsweise muss den Schülerinnen und Schülern präzise gezeigt werden, dass der Lern- und der Anwendungs-Situation dieselben Fakten, dieselben Muster, dieselben Prozeduren usw. zu Grunde liegen. Wenn die Übereinstimmung dieser Wissenselemente fehlt, bleibt Transfer in der Regel aus. Daher erwarten wir in der Schule oftmals zu viel von den Jugendlichen.

(sinngemäss nach C. Mähler e.a., *Transfer*, Sonderdruck aus: D. H. Rost (Hrsg.) (2006). Handwörterbuch: Pädagogische Psychologie, 3. Auflage, S. 782 – 793, Weinheim: Beltz)

ein besonders krasses Beispiel dafür, wie heikel Transfer sein kann:

Bei einer Untersuchung in Deutschland (Grundschule) wurden den Kindern die folgenden Aufgaben gestellt:

(A) Hier sind 5 Vögel, und hier sind 3 Würmer. Jetzt fliegen alle Vögel los, und jeder versucht, einen Wurm zu erwischen. Wie viele Vögel erwischen keinen Wurm?
(B) Hier sind 5 Vögel, und hier sind 3 Würmer. Jetzt fliegen alle Vögel los, und jeder versucht, einen Wurm zu erwischen. Wie viel mehr Vögel als Würmer gibt es?

Obwohl beide Aufgaben isomorph sind und beide Male einfach 5 – 3 gerechnet werden muss, lösten 96% aller Kinder (A) richtig, und nur 25% lösten (B) richtig. Das zeigt deutlich, dass schon winzige Veränderungen der Aufgabenstellung bewirken, dass das vorher Gelernte nicht mehr übertragen wird.

(Ausweg: Jede Fragestellung einzeln trainieren, immer wieder Zusammenhang aufzeigen...)

(sinngemäss aus: E. Stern, *Informatik als Schulfach*, Vortrag an der Universität Zürich, 10.10.2007)

12. Mozart macht schlau

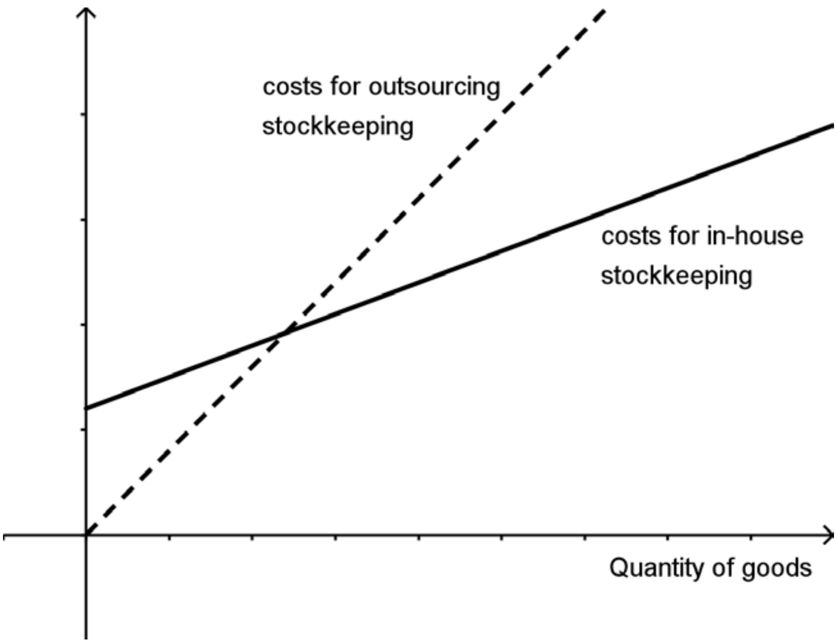
Im Jahr 1993 sorgte die amerikanische Psychologin Frances H. Rauscher für eine Sensation. Sie hatte in einer Studie beobachtet, dass das Hören der mozart'schen Sonate in D Major (K488) das räumliche Vorstellungsvermögen seiner Versuchspersonen verbesserte. Was Rauscher damals noch nicht ahnte: Ihr Artikel im Fachblatt Nature war der Startschuss für eine langlebige Legende. Fortan wurde behauptet, mit Hilfe klassischer Musik ließe sich der IQ steigern. Schwangeren wurde empfohlen, die Kinder im Mutterleib mit Musik des Salzburger Komponisten zu beschallen. 1998 verabschiedete die Landesregierung in Florida sogar ein Gesetz, das Kindertagesstätten dazu verpflichtete, mindestens eine Stunde am Tag klassische Musik zu spielen. Die Intelligenz fördernde Wirkung von klassischer Musik ging fortan als "Mozart-Effekt" in die Lehrbücher ein. Zu Unrecht. Während die Wissenschaftswelt mehr oder minder ergebnislos versuchte, die sensationellen Ergebnisse von Rauscher zu reproduzieren, räumte der Wiener Forscher Jakob Pietschnig später endgültig mit dem Mythos auf. Im Fachblatt Intelligence nahm er 39 Studien unter die Lupe, die den Mozart-Effekt an mehr als 3000 Probanden untersuchten. Das Ergebnis: Die Musik des Salzburger Komponisten hatte so gut wie keinen Einfluss auf das räumliche Vorstellungsvermögen. Im direkten Vergleich mit unspezifischen Tönen und Klängen fiel Mozart glatt durch. Er könne jedem nur empfehlen, meinte der Österreicher schließlich, auch weiterhin Mozarts Musik zu hören, "aber dies wird die Erwartung nicht erfüllen, dadurch die kognitiven Leistungen zu steigern".

(Ralph Schumacher (Ed.), „Macht Mozart schlau? – Die Förderung kognitiver Kompetenzen durch Musik“, Bundesministerium für Bildung und Forschung, Band 18, 2006)

13. ICT fördert guten Unterricht nicht grundsätzlich

Viele Studien zeigen, dass die Verwendung von ICT im Unterricht nicht grundsätzlich segensreich ist. Die Situation ist kompliziert. Hier ein paar Beispiele:

2003 führte ein Forschungsteam vom Max Planck Institut Berlin eine grosse Studie durch, die untersuchen sollte, ob das blosse Betrachten von linearen Graphen denselben Lerneffekt hat wie das aktive Konstruieren solcher. Es ging bei den Graphen um das Veranschaulichen von wirtschaftsmathematischen Zusammenhängen.



„Contrary to our expectations, university students of business education and mathematics/computer science performed less well in the transfer text questions when they had encountered a graph only passively

(under the "different-area/passive-graph" condition) than when had actively constructed a graph (under the "different-area/active-graph" condition). (…)

"As hypothesized, our results show that active construction of graphs can play an important role in fostering cross-content transfer."

(Carmela Aprea e.a., *Improving cross-content transfer in text processing by means of active graphical representation*, in: Learning and Instruction 13, 2003, pp. 191 – 20)

Studie an der Universität Stanford, 2009, 100 Studenten, Thema: Multitasking. Befund:

"People who are regularly bombarded with several streams of electronic information do not pay attention, control their memory or switch from one job to another as well as those who prefer to complete one task at a time, a group of Stanford researchers has found."

(Adam Gorlick, *Media Multitaskers pay mental price, Stanford Study shows*, Stanford University News, August 24, 2009
Anja Schulthess, *Mit den Ohren beim Dozenten und den Augen auf dem Laptop- Multitasking im Hörsaal oder die Granzen der Aufnahmefähigkeit*, Neue Zürcher Zeitung, 16. Mai 2011)

Lehr- und Lernforschung
– Grundsätze guten Unterrichts

Guter Unterricht soll dazu führen, dass sinnstiftendes und anwendbares Wissen entsteht. Das stellt sich aber nicht „einfach so“ ein, sondern es kann mit bestimmten Lernformen, deren Wirksamkeit empirisch sehr gut belegt ist, gefördert werden. Welche diesbezüglichen Erkenntnisse hat die Lehr- und Lernforschung schon erarbeitet?

Kognitiv aktivierende Einstiegsfragen

Der positive Effekt solcher Fragen (im Hinblick auf die Motivation) ist sehr gut belegt. Im naturwissenschaftlichen Unterricht wären das Phänomene, die in den Lernenden das Bedürfnis wachrufen, etwas Neues zu lernen, um das für sie Unerklärliche erklären zu können.

Beispiel:

Das Graphentelefon

Liebe Schülerin, lieber Schüler

Bitte setzen Sie sich Rücken an Rücken mit Ihrem Banknachbarn oder Ihrer Banknachbarin.

Sie werden gleich von der Lehrperson den Graphen einer Funktion bekommen. Stellen Sie sich vor, dass Sie mit Ihrem Banknachbarn oder Ihrer Banknachbarin telefonieren und ihm/ihr den Graphen Ihrer Funktion möglichst genau beschreiben müssen, so genau, dass dieser/diese den Graphen selbständig skizzieren kann.

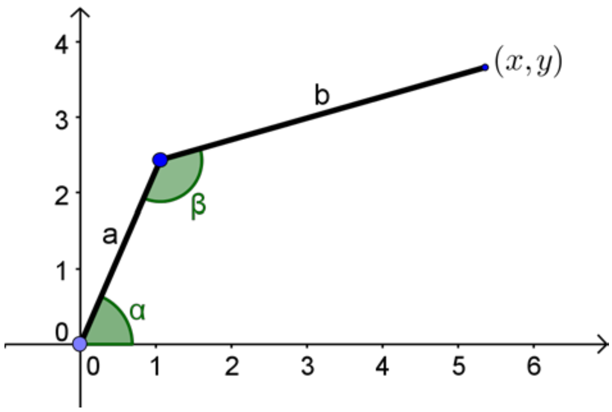
Unten finden Sie Platz, um die Beschreibungen, die sich als nützlich erweisen, stichwortartig zu notieren. Da auch Sie selber einen Graphen skizzieren werden, finden Sie unten auch Platz für den Graphen, den Ihr Banknachbar oder Ihre Banknachbarin Ihnen beschreiben wird.

Es ist gut möglich, dass Ihre Beschreibungen den in der Mathematik real verwendeten Beschreibungen schon sehr nahe kommen. Ihre Lehrperson wird nach dem Spiel diejenigen Begriffe erläutern, die als Fachbegriffe Eingang in die Mathematik gefunden haben.

Beschreibungen meines Graphen, die sich als nützlich erwiesen haben:

Der Graph meines Banknachbarn oder meiner Banknachbarin:

Oder:

Wenn wir von einem zweigelenkigen Roboterarm die Längen *a* und *b* von Ober- und Unterarm sowie die Winkel α und β kennen, können wir dann die Koordinaten *x*, *y* des Greifers berechnen? Welche unter Umständen neuen Werkzeuge müssen dafür entwickelt werden?	

Der solchen Fragen folgende Unterricht ist dann **auf vielfältige, aber nicht auf beliebige Weise** machbar. Das bedeutet, dass die Lehrperson nicht einfach irgendwas machen kann, um den gewünschten Lernprozess in Gang zu bekommen, dass aber andererseits verschiedene Methoden – geschickt umgesetzt – zu vergleichbar guten Resultaten führen können. Es ist also nicht das pingelige Befolgen einer ganz bestimmten Methode, das zählt.

Guter Unterricht ist überdies **schülerzentriert und lehrergeleitet**. Die Lehr- und Lernforschung hat gezeigt, dass forschendes Lernen dann besonders wirksam ist, wenn es durch klare und zielführende Aufträge angeleitet ist. Man sollte die Lernenden also nicht mit zu vagen Angaben allein lassen. (Wir alle kennen das Bild von Schülergruppen im Schulhauspark, denen gesagt wurde, sie sollen einfach mal etwas lesen ohne klare Instruktionen…)

Dass Unterricht dann am besten gelingt, wenn er **lehrergesteuert und schülerzentriert** ist, ist auch eine Hauptaussage der sogenannten Hattie-Studie (John Hattie, "visible learning" 2009). Diese Studie ist darum so toll, weil sie über 800 Metastudien zusammenfasst und sich darum fast nicht mehr irren kann.

Das bedeutet also, man sollte S+S keinesfalls einfach allein lassen. Man sollte ihr Lernen sehr genau und detailliert anleiten, und das kann ja nur eine professionelle Lehrperson. Zudem sollte die Anleitung aber so sein, dass man sich immer daran orientiert, wo die S+S gerade stehen, wie ihr Vorwissen beschaffen ist, was für Misskonzepte sie haben können, usw. das alles schafft man nicht, weil man sie allein "wursteln" lässt. (Darum schülerzentriert).

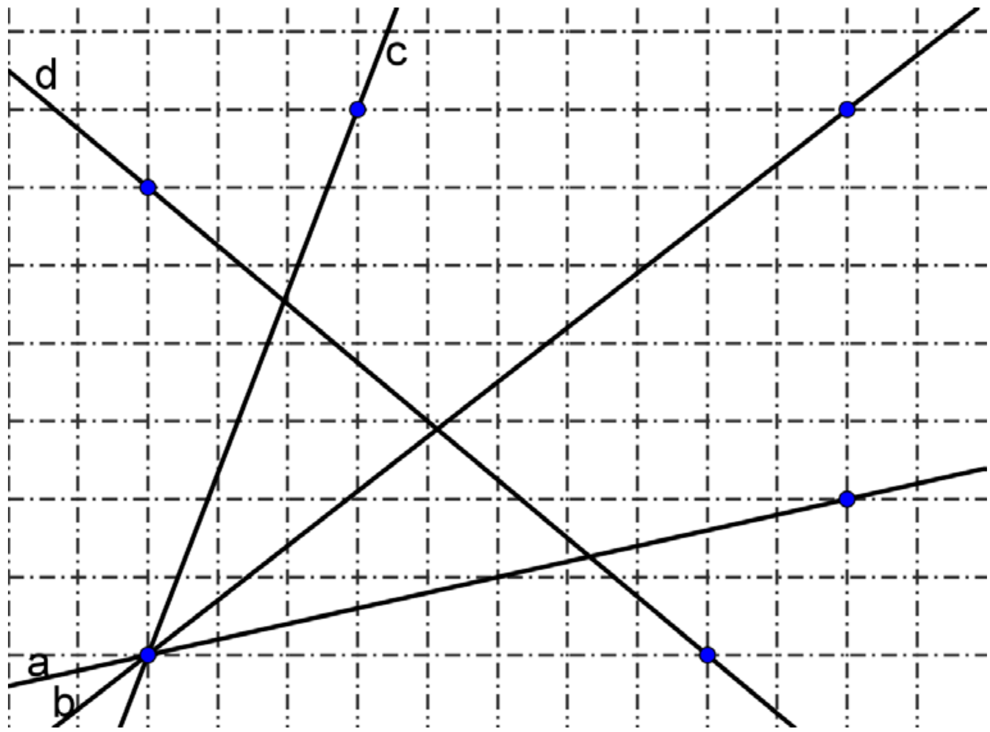
Weiter setzt guter Unterricht eine **genaue Kenntnis der Schülervorstellungen** voraus. Die Lehr- und Lernforschung hat gezeigt, dass intellektuelle Leistungen ganz wesentlich davon abhängen, inwiefern es gelingt, Vorwissen zur Bewältigung neuer Anforderungen zu nutzen. Um also möglichst wirksame Lerngelegenheiten anbieten zu können, muss die Lehrperson wissen, wo die Lernenden gerade stehen und welche Fehlkonzepte oder Verständnisschwierigkeiten sie haben könnten.

Getragen von diesem Geist schaffen Lehrpersonen Lerngelegenheiten, in denen die Lernenden ihr bisheriges Wissen erweitern können, etwa indem sie sich mit fruchtbaren Fragen auseinandersetzen, Hypothesen aufstellen, diese verifizieren oder falsifizieren, neue (gut angeleitete) Wege ausprobieren und verinnerlichen, das Gelernte in neuen Anwendungen einsetzen und mündlich und schriftlich über das Gelernte reflektieren. Dabei bieten sich verschiedene Lernformen an.

Mit **ICC** (Inventing with Contrasting Cases) kann man es schaffen, dass Schülerinnen und Schüler ein neues Konzept selber erfinden und damit auch besser behalten können statt einfach nur zu hören, wie die Lehrperson es einführt. Ein Beispiel aus der Mathematik:

<u>Wie steil ist die Gerade?</u>

Alice hat die folgende Abbildung einiger Geraden vor sich. Sie ruft gleich Bob an, der die Graphik nicht sieht, und möchte ihm erzählen, wie die Geraden aussehen und insbesondere, wie steil sie sind.



Erfinden Sie eine Masszahl für „Steilheit“!

Können Sie Alice bei diesem Unterfangen helfen? Genauer: Können Sie die Steilheit einer Geraden durch eine einzige Zahl ausdrücken, die Alice dann am Telefon nennen kann? Die Masszahl für Steilheit soll folgenden Regeln genügen:

1. Die Zahl soll für jede mögliche Gerade nach derselben Regel zustande kommen.
2. Je grösser die Zahl ist, desto steiler ist die Gerade. (Die Grösse der Zahl gibt Bob also eine präzise Vorstellung davon, wie steil die Gerade ist.)
3. Positive Zahlen stehen für Geraden, die streng monoton wachsen (wie a, b, c), und negative Zahlen stehen für Geraden, die streng monoton fallen (wie d).
4. Es muss für Alice möglich sein, die Masszahlen für die Geraden a – d allein aus der abgebildeten Graphik ohne weitere Hilfsmittel präzise zu bestimmen.

(Daniel L. Schwartz e.a., *Practicing versus Inventing with contrasting cases: The effects of telling first on learning and transfer*, Journal of Educational Psychology, American Psychological Association, 2011)

Angeleitet durch **Selbsterklärungsaufgaben** sollen sie zentrale Überlegungen in eigenen Worten wiedergeben, Erklärungen zu Sachverhalten, Zusammenhängen und Hintergründen nennen sowie Argumentketten aufbauen oder überprüfen. Gegenüber dem klassischen „Tell and practice-Unterricht", bei dem die Jugendlichen die Erklärungen zu den Sachverhalten bloss hören und dann sofort in Transferaufgaben anwenden sollen, findet hier eine Zwischenphase statt, in der die Lernenden ihr Verständnis der Stoffe selbständig vertiefen.

Literatur zum Thema Selbsterklärungsaufgaben:

(1) Danielle S. McNamara, Joseph P. Magliano, "*Self-Explanation and Metacognition: The Dynamics of Reading*", The University of Memphis
(2) Michelene T. H. Chi, Nicolas De Leeuw, Mei-Hung Chiu, Christian Lavancher, "*Eliciting Self-explanations improves Understanding*", University of Pittsburgh, in: Cognitive Science 18, 437 – 477 (1994)
(3) Alexander Renkl (Schwäbisch Gmünd, Germany), Robin Stark, Hans Gruber, Heinz Mandl (University of Munich, Germany), "*Learning from worked-out examples: The effects of example variability and elicited self-explanations*", in: Contemporary Educational Psychology 23, 90 – 108 (1998)
(4) Thorid Rabe (Universität Potsdam), "*Textgestaltung und Aufforderung zu Selbsterklärungen beim Physiklernen mit Multimedia*", Logos Verlag, Berlin 2007
(5) Michelene T. H. Chi, Miriam Bassok, „*Self-Explanations: How students study and ude examples in learning to solve problem*", in: Cognitive Science 13, 145-182, 1989

<u>Beispiele:</u>

Lehrer:
Sei $s(t) = -t^2 + 9$ eine Bewegungsgleichung. Welche der folgenden Behauptungen treffen zu?

a) Zwischen $t = 0$ und $t = 3$ ist die Geschwindigkeit des bewegten Objektes positiv.
b) Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t = 0$ und $t = 3$ beträgt -3 LE/ZE
c) Es gibt einen Zeitpunkt zwischen $t = 0$ und $t = 3$, zu dem die momentane Geschwindigkeit exakt -3 LE/ZE beträgt.
d) Zwischen $t = 0$ und $t = 3$ ist die (momentane) Geschwindigkeit des bewegten Objektes streng monoton wachsend.
e) Die Durchschnittsgeschwindigkeit zwischen $t = 0$ und $t = 1$ ist grösser als diejenige zwischen $t = 0$ und $t = 2$.

Schüler:
Korrekt sind b, c und e. Zu Punkt d: Sie ist streng monoton fallend! Zu Punkt e:Der Betrag der Geschwindigkeit ist zwar grösser, da es aber die negative Richtung ist, wird sie kleiner.

Lehrer:
Jemand formuliert sehr ungenau: „Die erste Ableitung einer Funktion ist die Tangente." Verbessern Sie diese Formulierung zu einer Aussage, die in einem Lehrbuch Eingang finden könnte.

Schüler:
Die 1te Ableitung der Funktion an der Stelle x_0 *misst die Steigung der Tangente an den Graphen im Punkt* $\left(x_0\ , f\left(x_0\right)\right)$*, also die momentane Änderungsrate.*

Lehrer:
Betrachten Sie die Funktion $f: x \mapsto x^7$. Wenn Sie die erste Ableitung mit Hilfe der „h-Formulierung" der Definition berechnen, ist es nützlich, den Binomischen Lehrsatz zu verwenden, um $(x+h)^7$ als Summe zu schreiben. Nennen Sie die für die Rechnung relevanten Summanden dieses Terms, und erklären Sie, wie es Ihnen damit nun gelingt, die Ableitung von f erfolgreich zu berechnen.

Schüler:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\right) = \lim_{h \to 0}\left(\frac{(x+h)^7 - x^7}{h}\right)$$

Bei $(x+h)^7$ kann man mit dem Pascalschen Dreieck die Koeffizienten herausfinden. Der erste Koeffizient ist 1(von x^7), im weiteren wird der Exponent von x immer um 1 kleiner, während der Exponent von h immer um eins grösser wird, sodass der letzte Summand so aussieht: 1(h^7). Da $f(x) = x^7$ ist, kürzt sich dieser Summand mit dem ersten weg und es bleiben noch die Summanden von $(x+h)^7$ übrig ohne den ersten Summanden halt! So haben jetzt alle Summanden ein h, weshalb man als nächstes h ausklammern kann und h dann mit dem h im Nenner wegkürzen kann. Jetzt lässt man h zu 0 tendieren und schaut was passiert. Alle Summanden die ein h haben, kann man theoretisch wegstreichen, da ihr h zu 0 tendiert. Der erste Summand, der kein h mehr hatte nach dem ausklammern, der bleibt übrig und lautet: $7x^6$.

Lehrer:
Stellt man einen Differentialquotienten auf, so muss man ja unter anderem den Term $f(x+h) - f(x)$ bilden. Hugo, ein mathematischer Laie, behauptet nun, dass $f(x+h) - f(x) = f(h)$ sei. Ist diese Behauptung korrekt für $f(x) = \sin(x)$? Ist sie korrekt für eine lineare Funktion? Ist sie korrekt für $f(x) = a \cdot x$?

Schüler:

- sin (3*pi/2) - sin(pi/2) = -2 und sin(pi) = 0 , somit stimmt es nicht !
- $f(x) = ax + b$
  $a(x+h) + b - [ax+b] = ah$, somit stimmt es nicht, denn es müsste $ah + b$ ergeben damit es stimmt, es ergibt aber nur ah also stimmt es nicht.
- Ja! Erstaunlicherweise!

Lehrer:
Der Beweis der Produktregel lebt von einer überaus reizvollen kleinen Idee. Schildern Sie die Beweisidee bitte in wenigen Sätzen und Ihren eigenen Worten.

Schüler:
Die Grundidee ist eine Erweiterung des Differentialquotienten mit dem Term $-f(x)\cdot g(x+h)+f(x)\cdot g(x+h)$, welcher offensichtlich gleich 0 ist, das muss er ja auch, damit man den Differentialquotienten nicht verändert. Dieser Term führt nun dazu, dass man bei den ersten beiden Summanden $g(x+h)$ ausklammern kann und dann also $g(x+h)\cdot(f(x+h)-f(x))$ bekommt. Bei den Summanden 3 und 4 kann man hingegen $f(x)$ ausklammern, und das gibt dann $f(x)\cdot(g(x+h)-g(x))$. Also hat man mit allem Drumherum, etwas umgestellt, folgendes Bild: $\lim\limits_{h\to 0}\left(g(x+h)\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}+f(x)\dfrac{g(x+h)-g(x)}{h}\right)$. Nun kann man problemlos fertigrechnen. Ohne eine geschickt gewählte Erweiterung des Differentialquotienten könnte man die obige Ableitung nicht durchführen. Der Erweiterungsterm muss einfach so gewählt werden, dass die beiden Funktionen *f* und *g* getrennt voneinander abgeleitet werden können, voneinander gelöst werden. Das wird dadurch möglich, dass man so erweitert, dass zum einen der Differentialquotient von *f* ersichtlich wird und zum anderen jener von *g*.

Lehrer:
(gleiche Frage wie oben)

Schüler:
Man merkt schnell das man beim Produkt nicht wie bei der Summe die verschiedenen Teile einzeln ableiten kann. Also setzt man beim Differentialquotienten einen Term ein, welcher gleich 0 ist, aber den Bruch sehr stark vereinfacht. Danach kann man den Limes aufteilen und erhält $f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$

Lehrer-Kommentar:
Wie lautet dieser Extraterm? Und wo wird er genau eingefügt? Und warum gelingt das Ableiten nachher einfacher?

Lehrer:
Begründen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: „Es sei $g(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad 4. Dann hat *g* höchstens drei Wendepunkte."

Schüler:
Nein, höchstens 2. Wir haben ja ermittelt, dass eine Polynomfunktion n-ten Grades höchstens $n-1$ Extrema besitzt. Also in diesem Fall 3. Und wenn die Funktion 3 Extrema besitzt, können es ja gar nicht 3 Wendepunkte sein. Denn ein Wendepunkt entsteht zwischen zwei Extrema. Also gibt es höchstens $n-2$ Wendepunkte. In diesem Fall 2.
Sonntag-Morgen Aufheiterung:

- Mathematiker sterben nicht. Sie verlieren nur einige ihrer Funktionen. Haha!
- Treffen sich ein Operator und eine Funktion. Sagt der Operator: „Lass mich vorbei, oder ich leite Dich ab." Sagt die Funktion: „Mach doch, mach doch, ich bin die Funktion e^x."

- Kommt ein Vektor in einen Drogenladen und sagt: „Ich bin linear abhängig."
- Kommt ein Nullvektor zum Psychiater: „Herr Doktor, ich bin orientierungslos."
- Wie befreit sich ein Mathematiker aus einem geschlossenen Käfig? Er definiert: Hier ist aussen!

Lehrer:
In einem Beispiel haben wir beobachtet, dass ein Objekt, das zum Zeitpunkt *t* die Geschwindigkeit $v(t)$ hatte, im Zeitintervall [*a* , *b*] die Wegstrecke $\int_a^b v(t)\,dt$ zurücklegte. Ist das immer richtig? Wenn wir zum Beispiel für $v(t) = \sin(t)$ und a = 0 und b = 2π das obige Integral berechnen, so ergäbe das ja 0. Trotzdem hat das Objekt aber Weg zurückgelegt. Wie ist das zu erklären? Oder besser: Was <u>genau</u> drückt obiges Integral immer aus?

Schüler:
Wenn die Geschwindigkeit negativ ist, bedeutet das, dass das Objekt sich rückwärts bewegt (oder vorwärts und die Achsen sind quasi umgekehrt gewählt). Wäre $v(t) = \sin(t)$, heisst das, das Objekt bewegt sich stetig nach vorne bis zum Zeitpunkt Pi und dann wieder zurück. Zum Zeitpunkt 2*Pi ist das Objekt wieder an der Stelle, wo es sich am Anfang befand. Diese Vorwärts-Rückwärts-Bewegung wiederholt sich periodisch. Das Integral $\int_a^b v(t)\,dt$ drückt also im Allgemeinen aus, wo sich das Objekt im Bezug zum Startpunkt befindet, genauer: die Differenz der beiden Positionen. Zudem: Die Beschleunigung $a(t)$ ist die momentane Änderung der Geschwindigkeit. Ist diese Änderung positiv, so beschleunigt das Objekt. Ist diese Änderung negativ, so bremst das Objekt. Das Integral $\int_c^d a(t)\,dt$ ist also die Geschwindigkeitsdifferenz im Zeitintervall.

Lehrer:

Erklären Sie einem Laien, weshalb der Mittelwertsatz der Integralrechnung gilt.

Schüler:
Wenn man bei der Funktion im Intervall [a,b] einen kleinsten Funktionswert nimmt (tiefster Punkt des Graphen), kann man diesen Funktionswert mit dem x-Abschnitt im Intervall [a,b] multiplizieren, also $f(x_1)$*(b-a). Somit entsteht geometrisch gesehen eine Fläche. Wenn man diese Prozedur noch für einen höchsten Funktionswert ($f(x_2)$) anwendet, erhält man wieder eine Fläche. Nun ist es logisch, dass die Fläche des tiefsten Funktionswerts kleiner ist als die Fläche des grössten Funktionswert und dass der Flächeninhalt der Fläche, welche durch das Integral bestimmt wird, dazwischen liegt. Bei einer stetigen Funktion gibt es dann sicherlich eine Zahl, mit welcher man (b-a) multiplizieren kann, damit man den Flächeninhalt des Integrals bekommt. Diese Zahl muss logischerweise zwischen $f(x_1)$ und $f(x_2)$ liegen. Daraus folgt, dass der Mittelwertsatz stimmt.

Mit **metakognitiven Fragen** kann man die Lernenden dazu anregen, selbständig über den Stand und die Fortschritte ihres Lernens zu reflektieren. Wo stehen sie gemäss eigener Einschätzung? Was haben sie schon gut verstanden, und zu welchen Punkten bestehen noch welche Unklarheiten?

Auch das periodische Einbinden von **geistigen Werkzeugen** (Diagramme, Formeln, Graphen) kann überaus hilfreich sein bei der Konstruktion von intelligentem Wissen und dem Transfer. Gerade weil sie in diversen Disziplinen zur Anwendung gelangen und immer für eine übersichtliche Bündelung von Information sorgen, sollten sie speziell geübt werden.

Armin P. Barth, Wattwil, 1. 9. 2012